NOUVEAU PROGRAMME



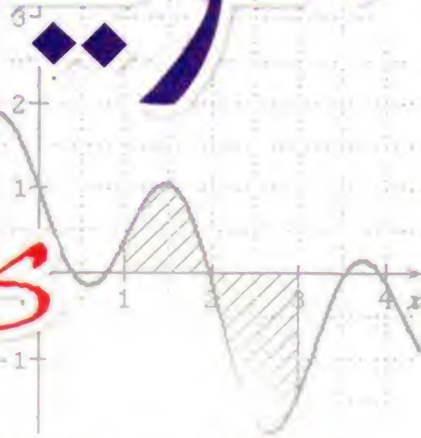
أنجيم ANJIM

Hard_equation

في الرياضيات



3AS ثانوي



جبر تحليل هندسة

رياضيات
تقني رياضي
علوم تجريبية

- ملخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة للتطبيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة.
- دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ تزقغين مصطفى



وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية

أنجيم ANJIM

في الرياضيات

3AS ثانوي

جبر تحليل هندسة

رياضيات
تقني رياضي
علوم تجريبية

- [illegible]خص عملي للدرس .
- تمارين محل[illegible]بيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة.
- دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ ترقفين مصطفى



وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية

دار نزهة الألباب
لنشر الكتب والوسائل
والعلم و المعرفة

ساحة العقيد لطفي غرداية
هاتف فاكس: 029.88.35.49
هاتف Tel : 029.89.95.80

الإيداع القانوني
3367/2007
ISBN 978-9961-6615-7-5

تصميم الغلاف
CYCLOPEDIA
الفريق التقني لدار نزهة الألباب

بسم الله الرحمن الرحيم

عنوان الكتاب	أنجيم في الرياضيات 3 ثانوي
إعداد	الأستاذ : تزقغين مصطفى

مـــقدمة

يتوجّه هذا الكتاب إلى تلاميذ أقسام السنة الثالثة ثانوي، بشعبه العلمية، ويدخل في إطار سلسلة [illegible] تدعى ((أنجيم)) – المجتهد –. وقد أُعدّ الكتاب وفقا للبرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية والتي سيشرع في تطبيقه مع هذه الأقسام ابتداء من هذه السنة الدراسية 2008/2007.

أهداف الكتاب

- يمكّن التلميذ من الحصول على معلومات محدّدة وملخصة.
- يساعد التلميذ على تطبيق المعلومات التي تحصّل عليها في القسم.
- يدرّب التلميذ على الاستيعاب الحسن و الترسيخ الجيد للمعلومات.
- يحضّر التلميذ لاجتياز امتحان البكـــالوريا.

محتوى الكتاب

- يحتوي الفصل الأول من هذا الكتاب على ملخصات للمحاور العشرة التي يتضمنها البرنامج الدراسي لمادة الرياضيات. يُقدّم الملخّص على شكل: تعريف- مبرهنة – لاحظ – نتائج . ويكـــون داخـــل إطـــار، يحدّد للتلميذ بالضبط بداية ونهاية المعلومة.
- يُتبع كل محور بخمسة تمرينات تطبيقية محلولة.
- في نهاية كل محور يجد التلميذ عشرة تمرينات للتدريب تتضمن مهارات المحور.
- خُصّص الجزء الثاني من الكتاب لبكالوريا (2007/2006/2005) لدول أجنبية. يتماشـــى برنامجهـــا الدراسي في مادة الرياضيات و البرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية الجزائرية.
- يتبع كل موضوع بمقترح للحل.
- في نهاية الكتاب، يجد التلميذ بعض الدساتير الأكثر استعمالا في هذا البرنامج.
- في نهاية الكتاب، يجد التلميذ بعض التعليمات الخاصة باستعمال الحاسبة المبرمجة TI – 83plus.

أعزائي التلاميذ: تحقيقا لتطلعاتكم للنجاح في هذه السنة الدراسية، أضع بين أيديكم هذا الكتاب، الـــذي يأتي ليساعدكم ويذلّل بعض الصعوبات التي ربما تعترضكم خلال تحضيراتكم للامتحان.

أرجو لك عزيزي التلميذ التوفيق في استعمال هذا الكتاب. وتجدر الإشارة هنا إلى ضرورة حل التمرين من طرف التلميذ قبل الإطلاع على الحل. **((المهم في التمرين هو حله و الأهم هو التفكير في حله.))**
هذا الكتاب، يبقى إلى ما بعد البكالوريا كمرجع للطالب، كونه يتضمّن ملخّصات لمفاهيم أساسية في البرنامج العام للرياضيات.

الأستاذ: تزقغين مصطفى

ثانوية مفدي زكرياء- بني يزقن – ولاية غرداية /// العنوان الالكتروني: mtizmath@gmail.com

الفصل الأول

ملخّصات للدروس

تمارين تطبيقية

تمارين للحل

1- الحساب

ما يجب أن يعرف:

★ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

◆ قاسم ومضاعف عدد صحيح:

تعريف

a و b عددان صحيحان.

نقول أن b **يقسم** a إذا وجد عدد صحيح k بحيث: $a = kb$ ونرمز بـ: $b \mid a$.

نقول أيضا أن: العدد b **قاسم** للعدد a. وكذلك أن: العدد a **مضاعف** للعدد b.

◆ خواص.

- كل عدد صحيح هو قاسم للعدد 0، و 0 هو المضاعف الوحيد للعدد 0.
- مضاعفات عدد صحيح غير معلوم n هي الأعداد من الشكل kn حيث k عدد صحيح، ونرمز لمجموعة هذه المضاعفات بـ: $n\mathbb{Z}$. ولدينا $0\mathbb{Z} = \{0\}$
- من أجل كل عدد صحيح a، العدد 1 هو قاسم للعدد a.
- كل عدد صحيح a يقبل على الأقل القواسم: 1، -1، a، $-a$.
- من أجل كل عددين صحيحين a و b. إذا كان b يقسم a و a يقسم b فإن $a = b$ أو $a = -b$.
- a، b، c أعداد صحيحة:
  - إذا كان (a يقسم b) و (b يقسم c) فإن (a يقسم c)
  - إذا كان (a يقسم b) فإن (a يقسم bc)
  - إذا كان (a يقسم b) فإن (ac يقسم bc)
  - إذا كان (a يقسم b) و (a يقسم c) فإن (a يقسم $b + c$) و (a يقسم $b - c$)

- إذا كان (a يقسم b) و (a يقسم c) فـإن (a يقسم $kb + k'c$)
حيث k و k' عددان صحيحان.

◆ القسمة الإقليدية في N.

تعريف

a و b عددان طبيعيان،حيث b يختلف عن الصفر.

توجد ثنائية وحيدة $(q;r)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

عملية إيجاد الثنائية $(q;r)$ انطلاقا من a و b تدعى القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. q يدعى حاصل القسمة و r يدعى باقي القسمة.

للحفظ

b يقسم a إذا وفقط إذا كان في القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b، باقي القسمة r معدوم.

عند قسمة العدد الطبيعي a على العدد الطبيعي غير المعدوم b يكون باقي القسمة إما 0،إما 1 إما 2 إما...إما $(b-1)$.

◆ الموافقة العددية في Z.

تعريف

a و b عددان صحيحان، و n عدد طبيعي.

نقول أن العدد a يوافق العدد b بترديد n إذا وفقط إذا كان العدد $(a-b)$ مضاعف n ونرمز: $a \equiv b[n]$

للحفظ

a، b، c، أعداد صحيحة و n عدد طبيعي غير معدوم.

- $a \equiv a[n]$ (الانعكاسية)
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$ (التناظرية). نقول أن a و b متوافقان.
- إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) فـإن $a \equiv c[n]$ (المتعدية).
- $a \equiv 0[n]$ يكافئ (a يقبل القسمة على n).

للحفظ

a، b، a'، b' أعداد صحيحة و n، m عددان طبيعيان غير معدومين.

- $a \equiv b[n]$ يكافئ $(a + a') \equiv (b + a')[n]$.
- إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $a' \equiv b'[n]$) فـإن $a + a' \equiv b + b'[n]$.
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فـإن $aa' \equiv ba'[n]$.
- إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $a' \equiv b'[n]$) فإن $a \times a' \equiv b \times b'[n]$.
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فـإن $a^m \equiv b^m[n]$.

◆ القاسم المشترك الأكبر $PGCD$

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر عنصر في مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين. يرمز له $PGCD(a;b)$

مبرهنة1

إذا كان r هو الباقي في القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي غير المعدوم a على العدد الطبيعي غير المعدوم b وكان $r \neq 0$، فإن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r.

للحفظ

a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة.

- $PGCD(a;b;c) = PGCD(PGCD(a;b);c)$
- $PGCD(a;b) = b$ يكافئ b يقسم a.
- $PGCD(a \times c; b \times c) = c \times PGCD(a;b)$

$PGCD(a;b) = 1$ يكافئ (a و b أوليان فيما بينهما).

- $PGCD(a;b) = d$ يكافئ ($\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ أوليان فيما بينهما)
- مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم العدد $PGCD(a;b)$.

خوارزمية إقليدس

a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $b<a$ و b لا يقسم a.

نسمي q_1 وَ r_1 الحاصل والباقي في القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

نجري قسمة أقليدية للعدد b على العدد r_1، وهكذا إلى أن نصل إلى بـــاقٍ معدوم. فنكتب القسمات الإقليدية المتتابعة كما يلي:

$$a = bq_1 + r_1 \qquad (0<r_1<b)$$
$$b = r_1q_2 + r_2 \qquad (0<r_2<r_1)$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \qquad (0<r_3<r_2)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$r_{p-1} = r_p q_{p+1} + 0$$

هذه القسمات الإقليدية المتتابعة تدعى خوارزمية إقليدس. المتتالية (r_n) موجبة ومتناقصة تماما، أصغر حد لها غـــير معـــدوم هو $PGCD(a;b)$.

مبرهنة2- بيزو-

عددان طبيعيان غير معدومين a و b، أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان α و β بحيث: $a\alpha + b\beta = 1$.

مبرهنة3- غوص-

a، b وَ c أعداد طبيعية غير معدومة. إذا كان a يقسم $b\times c$ وكان a وَ b أوليان فيما بينهما، فــإن a يقسم c.

للحفظ

- **إذا كان** عدد طبيعي a يقبل القسمة على عددين طبيعيين أوليين فيما بينـــهما b وَ c **فـــإن** العدد a يقبل القسمة على bc.
- **إذا كان** $PGCD(a;b)=d$ **فـــإنه** يوجد عددان صحيحان α و β بحيث: $a\alpha + b\beta = d$.
- عدد طبيعي أولي مع جداء عددين طبيعيين **إذا وفـــقط إذا كان** أولي مع كل عامل من الجداء.

◆ المضاعف المشترك الأصغر PPCM

تعريف

a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a وَ b هو أصغر عنصر غير معدوم في مجموعة المضاعفات المشتركة لهذين العددين. يرمز له $PPCM(a;b)$.

خـــواص

a، b وَ c أعداد طبيعية غير معدومة.

- $PPCM(a;b;c)=PPCM(PPCM(a;b);c)$.
- $PPCM(a;b)=a$ معناه a مضاعف b.
- $PPCM(a\times c;b\times c)=c\times PPCM(a;b)$.
- $PPCM(a;b)=ab$ معناه (a وَ b أوليان فيما بينهما).
- $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=ab$.
- $PPCM(a;b)=m$ معناه($\frac{m}{a}$ وَ $\frac{m}{b}$ أوليان فيما بينهما).
- مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a وَ b هي مجموعة مضاعفات العدد $PPCM(a;b)$.

◆ الأعداد الأولية

تعريف العدد طبيعي p أولي **إذا وفقط إذا** قبل قاسمان بالضبط وهما: 1 وَ p.

للحفظ

- العددان 0 وَ 1 غير أوليين.
- العدد 2 هو أول عدد طبيعي أولي وهو الطبيعي الزوجي الأولي الوحيد.
- إذا كان p عدد أولي فهو أولي مع الأعداد 2، 3،....، $p-1$.
- إذا كان عدد أولي يقسم جداء عوامل فهو يقسم أحد هذه العوامل.
- كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا.
- كل عدد طبيعي غير أولي n وأكبر من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا p حيث: $p^2 \le n$.

متتالية الأعداد الأولية غير منتهية.

تحليل عدد طبيعي إلى جدا عوامل أولية.

مبرهنة4

كل عدد طبيعي غير أولي n وأكبر من 1، يقبل تحليلا وحيدا إلى جدا عوامل أولية. ويكتب بالشكل: $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times.....\times p_m^{a_m}$

حيث: p_1، p_2، ...، p_m أعداد أولية متمايزة و a_1، a_2، ...، a_m أعداد طبيعية غير معدومة.(m عدد طبيعي).

◆ **التعداد**

مبرهنة5

x عدد طبيعي أكبر من 1.

كل عدد طبيعي n يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على الشكل:

$$n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_px^p$$

حيث: $a_p\neq 0$ و a_0، a_1، a_2، ...، a_p أعداد طبيعية تحقق:

$0\le a_h<x$ من أجل كل عدد طبيعي h حيث: $h<p$

هذه الكتابة للعدد n تدعى نشر العدد n وفق الأساس x. ونرمز:

$$n=\overline{a_p...a_2a_1a_0}^{(x)}$$

للحفظ

- كل عدد طبيعي أصغر من الأساس x يدعى رقماً في الأساس x.
- في نظام التعداد ذي الأساس 2 الرقمان هما: 0 ، 1.
- في نظام التعداد ذي الأساس 10 الأرقام هي: 0، 1، 2 ... 9.
- في نظام التعداد ذي الأساس 11 الأرقام هي: 0، 1، 2 ... 9، α.(α يمثل 10).
- في نظام التعداد ذي الأساس 12 الأرقام هي: 0 ، 1، 2 ... 9، α، β. (β يمثل 11).

طريقة

اكتب العدد 485 في النظام ذي الأساس 2 ثم الأساس 5 ثم الأساس 12.

$485=2\times 242+\mathbf{1}$	$485=5\times 97+\mathbf{0}$	$485=12\times 40+\mathbf{5}$
$242=2\times 121+\mathbf{0}$	$97=5\times 19+\mathbf{2}$	$40=12\times\mathbf{3}+\mathbf{4}$
$121=2\times 60+\mathbf{1}$	$19=5\times\mathbf{3}+\mathbf{4}$	
$60=2\times 30+\mathbf{0}$		
$30=2\times 15+\mathbf{0}$		
$15=2\times 7+\mathbf{1}$		
$7=2\times 3+\mathbf{1}$		
$3=2\times\mathbf{1}+\mathbf{1}$		

أي $485=\overline{111100101}^{(2)}$ ، أي $485=\overline{3420}^{(5)}$ ، اي $485=\overline{345}^{(12)}$

طريقة

انشر العدد $\overline{1\alpha 52}^{(11)}$ في أساسه ثم اكتبه في النظام ذي الأساس 7.

$$\overline{1\alpha 52}^{(11)}=2\times 11^0+5\times 11^1+10\times 11^2+1\times 11^3=2598$$

ولدينا:

$$2598=7\times 371+\mathbf{1}$$
$$371=7\times 53+\mathbf{0}$$
$$53=7\times 7+\mathbf{4}$$
$$7=7\times\mathbf{1}+\mathbf{0}$$

أي: $2598=\overline{10401}^{(7)}=\overline{1\alpha 52}^{(11)}$

العدد 7431 مكتوب في الأساس 8، أكتب نفس العدد في الأساس 2.

$$7431=1\times 8^0+3\times 8^1+4\times 8^2+7\times 8^3$$
$$=1+(1+2)\times 2^3+2^2\times 2^6+(1+2+2^2)\times 2^9$$
$$=1+2^3+2^4+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}$$
$$=1\times 2^0+0\times 2^1+0\times 2^2+1\times 2^3+1\times 2^4+$$
$$+0\times 2^5+0\times 2^6+0\times 2^7+1\times 2^8+1\times 2^9+1\times 2^{10}+1\times 2^{11}$$

أي: $\overline{7431}^{(8)}=\overline{111100011001}^{(2)}$

تمارين محلولة

الموافقة العددية

1 عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $2^n - 1$ يقبل القسمة على 17.

الحل: ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 17.

نجد: $2^0 \equiv 1[17]$ ، $2^1 \equiv 2[17]$ ، $2^2 \equiv 4[17]$ ، $2^3 \equiv 8[17]$ ، $2^4 \equiv 16[17]$ ، $2^5 \equiv 15[17]$ ، $2^6 \equiv 13[17]$ ، $2^7 \equiv 9[17]$ ، $2^8 \equiv 1[17]$ ...

من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 8، إذاً: $2^n \equiv 1[17]$ يكافئ أن $n = 8k$ حيث $k \in N$

الموافقة العددية

2 عيّن الباقي في القسمة الإقليدية لـ: 56^{66} على 5 ، 155^{13} على 3 ، 2008^{2007} على 9 ، 2006^{2008} على 2007.

الحل: $56 \equiv 1[5]$ منه $56^{66} \equiv 1^{66}[5]$ أي $56^{66} \equiv 1[5]$ إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 56^{66} على 5 هو 1.

$155 \equiv 2[3]$ منه $155^{13} \equiv 2^{13}[3]$ إذاً للعددين 155^{13} وَ 2^{13} نفس باقي القسمة على 3.

$2^0 \equiv 1[3]$ ، $2^1 \equiv 2[3]$ ، $2^2 \equiv 1[3]$ من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 2،

ولدينا: $2^{13} = 2^{2\times6+1}$ فإن $2^{13} \equiv 2[3]$. إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 155^{13} على 3 هو 2.

$2008 \equiv 1[9]$ منه $2008^{2007} \equiv 1^{2007}[9]$ أي $2008^{2007} \equiv 1[9]$ إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 2008^{2007} على 9 هو 1.

$2006^0 \equiv 1[2007]$ ، $2006 \equiv 2006[2007]$ ، $2006^2 \equiv 2[2007]$ ، $2006^3 \equiv 0[2007]$ ...

من خواص الموافقة ينتج :نه: من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 2 لدينا:

$2006^n \equiv 0[2007]$ وبالتالي باقي قسمة 2006^{2008} على 2007 هو 0.

حوارزمية اقليدس- مبرهنتي بيزو وَ غوص

3 بيّن أن المعادلة $53x + 25y = 1$ تقبل حلولا في $Z \times Z$، ثم حل هذه المعادلة.

الحل: باستعمال خوارزمية اقليدس نجد: $53 = 25 \times 2 + 3$ و $25 = 3 \times 8 + 1$

وَ $3 = 1 \times 3 + 0$ إذاً آخر باقي غير معدوم في هذه القسمات هو 1. يعني

$PGCD(53;25) = 1$ (يمكن ترتيب العمليات في جدول)

أي العددان 53 و 25 أوليان فيما بينهما. وبالتالي حسب بيزو توجد على الأقل ثنائية $(\alpha;\beta)$ من $Z \times Z$ تحقق المعادلة $53\alpha + 25\beta = 1$. هذه الثنائية $(\alpha;\beta)$ تعتبر حلا للمعادلة المطلوبة.

(ثنائية بيزو ليست وحيدة)

لحل المعادلة نوجد حلا خاصا باستعمال خوارزمية اقليدس كما يلي: $1 = 25 - 3 \times 8$ أي

$$1 = 25 - (53 - 25 \times 2) \times 8$$

وبالتالي: $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$ يعني أن الثنائية $(-8;17)$ حلا خاصا للمعادلة.

نوجد إذاً جميع الحلول كما يلي:

من الكتابتين $53x + 25y = 1$ و $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$ وبالطرح طرف من طرف نحصل على: $53(x+8) = 25(-y+17)$ هذا يعني أن 25 يقسم العدد $53(x+8)$ وبما أن 53 وَ 25 أوليان فيما بينهما(حسب ما سبق) فحسب غوص 25 يقسم $(x+8)$

أي $(x+8) = 25k$ حيث $k \in Z$ إذاً $x = 25k - 8$

لإيجاد قيم y نعوض x بقيمته في المعادلة $53x + 25y = 1$ فنجد بعد الحساب: $y = -53k + 17$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المطلوبة هي: $\{(25k - 8; -53k + 17) / k \in Z\}$.

التحليل إلى جدا عوامل أولية

4 أوجد الثنائيات $(x;y)$ من المجموعة $N \times N$ والتي تحقق المعادلة: $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$.

الحل: لدينا: $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$ تكافئ $(x-y)(x+y) = 2^2 \times 23^2$ يعني أن كلا من العددين $(x-y)$ وَ $(x+y)$ يقسم العدد $2^2 \times 23^2$ علما أن: $0 < x-y \le x+y$ وَ $(x-y)$ وَ $(x+y)$ زوجيان معا أو فرديان معاً.

نوجد أولاً قواسم العدد $2^2 \times 23^2$ وهي من الشكل $2^n \times 23^m$ حيث: $n \in \{0;1;2\}$ وَ $m \in \{0;1;2\}$ هذه القواسم هي:

1; 2 ; 4 ; 23 ; 46 ; 92 ; 529 ; 1058 ; 2116 وباستعمال الشرط السابق نحصل على الجملتين التاليتين:

$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=1058 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-y=46 \\ x+y=46 \end{cases}$ وبعد حلّها نجد الثنائيات $(x;y)$ المطلوبة وهي: $(530;528)$ وَ $(46;0)$.

العلاقة بين $PGCD$ وَ $PPMC$

5	أوجد عددين علما أن مجموعهما 581 وحاصل قسمة مضاعفيهما المشترك الأصغر على قاسميهما المشترك الأكبر هو 240.

الحل: نبحث عن عددين a وَ b بحيث: $a+b=581$ وَ

$$PPCM(a;b) = 240 \times PGCD(a;b)$$

علما أن: $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = ab$ وأن: $PGCD(a;b)=d$

معناه($\frac{a}{d}$ وَ $\frac{b}{d}$ أوليان فيما بينهما)

فإن الشرط الثاني يكتب: $a' \times b' = 240$ وَ $PGCD(a;b)=d$ وَ $a = d\times a'$ وَ $b = d\times b'$ وَ $PGCD(a';b')=1$.

نبحث أولاً عن عددين a' وَ b' بحيث: $d(a'+b')=581$ وَ $a'\times b'=240$ وَ $PGCD(a';b')=1$

الشرط الأول يعطي قيم d الممكنة وهي قواسم 581 الذي يكتب 7×83 إذاً:

$$d \in \{1;7;83;581\}$$

مناقشة: إذا كان $d=581$ فـــإن: $a'+b'=1$ وَ $a'\times b'=240$ مستحيل.

إذا كان $d=7$ فـــإن: $a'+b'=83$ وَ $a'\times b'=240$ يعني a' و b' حلّي المعادلة: $x^2-83x+240=0$ وبالتالي: $a'=80$ وَ $b'=3$. منه: $a=560$ وَ $b=21$.

إذا كان $d=1$ فـــإن: $a'+b'=581$ وَ $a'\times b'=240$ مستحيل.

خلاصة: العددان المطلوبان هما: 560 وَ 21.

التعداد

6	n عدد طبيعي، يكتب في الأساس x بالشكل 1254، ويكتب العدد $2n$ في نفس الأساس x بالشكل 2541 .عيّن x. أكتب العدد n في الأساس 10 ، ثم اكتب العدد $3n$ في الأساس x.

الحل: لدينا: $n = 4+5x+2x^2+x^3$ وَ $2n = 1+4x+5x^2+2x^3$

تنتج المعادلة التالية: $x^2-6x-7=0$

ذات المجهول الطبيعي x حيث: $x>5$. حلّي المعادلة هما: -1 وَ 7 إذاً $x=7$

$n = \overline{1254}^{(7)} = 4+5\times7+2\times7^2+1\times7^3 = 480$ يعني n يكتب 480 في الأساس 10.

$3n$ يكتب 1440 في الأساس 10 ثم يحوّل إلى الأساس 7.

نجد:

1440=7×205+**5**

205=7×29+**2** أي $3n = \overline{4125}^{(7)}$

29=7×**4**+**1**

تمارين للتدريب

1. القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a على كل من العددين 155 وَ 161 تعطي نفس الحاصل، والباقيان على الترتيب 65 وَ 23. تعرّف على العدد a.

2. ماهي البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لعدد طبيعي فردي على 4؟.

بيّن أنه إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن العدد n^2-1 يقبل القسمة على 8.

3. عيّن البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لمربع عدد صحيح على 8.

عيّن الأعداد الصحيحة n التي تحقق: $(n+3)^2 \equiv 1[8]$.

4. n عدد طبيعي.

1. أوجد حسب قيم العدد n البواقي الممكنة في قسمة العدد 5^n على 13.
2. استنتج أن العدد $2007^{2008}-1$ يقبل القسمة على 13.
3. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، العدد $31^{4n+1}+44^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13.

5. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العددان التاليان أوليان فيما بينهما، في كل حالة:

(1): $n+2$ وَ $n+3$، (2): $7n+2$ وَ $4n+1$، (3): $n(2n+1)$ وَ $n+1$، (4): $2n+1$ وَ $3n+1$.

6. n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $a=4n+3$ وَ $b=5n+2$ وَ $d=PGCD(a;b)$

1. أعط قيمة d في كل حالة من الحالات الثلاث التالية: $n=1$ ، $n=11$ ، $n=15$.
2. احسب العدد $5a-4b$ واستنتج قيم d الممكنة.
3. عيّن العددين الطبيعيين n وَ k بحيث: $4n+3=7k$، ثم العددين الطبيعيين n وَ k' بحيث: $5n+2=7k'$.

7. حل في المجموعة $N\times N$ كلا من المعادلات التالية:

(1): $x^2-y^2=77$، (2): $x^2-y^2=36$، (3): $x^2-y^2=165$، (4): $xy-3y-24=0$.

8. a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين، نضع: $d=PGCD(a;b)$ وَ $m=PPCM(a;b)$

تعرّف على جميع الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق: $m=d^2$ وَ $d+m=156$ و $a\geq b$.

9. لا يملك نسيم إلاّ قطعاً نقديةً ذات $20DA$ وأوراقاً نقديةً ذات $100DA$. علما أن لديه مبلغ $300DA$. كم قطعة وكم ورقة نقدية لنسيم؟.

10. نضع: $a\in Z$ وَ $b\in Z^*$

1. نفرض أن $PGCD(a;b)=1$ ، بيّن باستعمال مبرهنة بيزو أن: $PGCD(a;b^2)=1$ وَ $PGCD(a^2;b^2)=1$

   واستنتج أن: $PGCD(a;b)=1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2)=1$
2. نعتبر x عدد صحيح.
   - انشر العبارة: $(x^2+x-1)^2$، وحلّل العبارتين: x^2+x-2 وَ x^2+4x+4.
   - عيّن الأعداد الصحيحة x بحيث يكون الكسر $\dfrac{x^4+2x^3-x^2-2x+1}{x^2+4x+4}$ قابل للاختزال.

2- الدوال العددية

ما يجب أن يعرف:

★ عمومـــيات

في كامل هذا المحور، نتعامل مع الدوال العددية للمتغيّر الحقيقي، يعني دوال تأخذ متغيراتها من جزء في R (تدعى مجموعة البدء)وتضع قيّمها في جزء من R (تدعى مجموعة الوصول).

◆ **مجموعة التعريف**

تعريف

مجموعة تعريف الدالة f هي جزء من مجموعة البدء وتضم الأعداد التي لها صورة في مجموعة الوصول بالدالة f. ونرمز لها: D_f

◆ **التمثيل البياني**

تعريف

في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة النقط M من المستوي والتي إحداثياتها $(x;y)$ تحقق: $x\in D_f$ وَ $y=f(x)$ ← **معادلة ديكارتية للتمثيل البياني**

◆ **الشفعية – الدورية**

(الدالة f زوجية) **يعني أنه** (من أجل كل x من D_f : $-x\in D_f$ وَ $f(-x)=f(x)$)

(الدالة f فردية) **يعني أنه** (من أجل كل x من D_f : $-x\in D_f$ وَ $f(-x)=-f(x)$)

(الدالة f دورية ودورها p) **يعني أنه** (من أجل كل x من D_f : $(x+p)\in D_f$ وَ $(x-p)\in D_f$ وَ $f(p+x)=f(x)$) . (p عدد حقيقي موجب تماما)

للحفظ

- إذا كانت الدالة f زوجية فإن محور التراتيب في المعلم **المتعامد** هو محور تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة f فردية فإن مبدأ المعلم هو مركز تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة f دورية ودورها p ، فإن تمثيلها البياني صامد إجمالا بالانسحابات التي شعاعها $pk\vec{i}$. حيث $(k \in Z)$

◆ **تركيب دالتين**

تعريف

نعتبر E ، F وَ G ثلاثة أجزاء من R .

إذا كانت الدالة f من E نحو F وكانت الدالة g من F نحو G ،فإن الدالة $g \circ f$ تدعى مركّب الدالتين f وَ g بهذا الترتيب وهي من E نحو G معرّفة بـــ: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

ولدينا: $x \in D_{g \circ f}$ يكـــــافئ ($x \in D_f$ وَ $f(x) \in D_g$)

◆ **اتجاه تغـــيير دالة**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجال I

[f متزايدة تماما على I] يكـــــــافئ

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فــــإن $f(x_1) < f(x_2)$]

[f متناقصة تماما على I] يكـــــــافئ

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فــــإن $f(x_1) > f(x_2)$]

[f متزايــــــدة على I] يكـــــــافئ

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \le f(x_2)$]

[f متناقـــــصة على I] يكـــــافئ

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \ge f(x_2)$]

[f ثابـــــتة على I] يكـــــافئ

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، $f(x_1) = f(x_2)$]

للحفظ

f وَ g دالتان معرفتان على نفس المجال I .

إذا كان للدالتين f وَ g نفس اتجاه التغيّر **فإن** $g \circ f$ تكون متزايدة على I .

إذا كان للدالتين f وَ g اتجاها تغيّر متعاكسين **فإن** $g \circ f$ تكون متناقصة على I .

◆ **القيم الحدية لدالة**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجموعة D من R وَ x_0 عنصر من D .

الدالة f تقبل قيمة **حدية عظمى** عند x_0 **يكـــافئ** من أجل كل x من D ، $f(x) \le f(x_0)$.

الدالة f تقبل قيمة **حدية صغرى** عند x_0 **يكـــافئ** من أجل كل x من D ، $f(x) \ge f(x_0)$.

الدالة f تقبل قيمة **حدية عظمى محلّية** عند x_0 **يكـــافئ** يوجد مجال I من D يضم x_0 بحيث،من أجل كل x من I ، $f(x) \le f(x_0)$.

الدالة f تقبل قيمة **حدية صغرى محلّية** عند x_0 **يكـــافئ** يوجد مجال I من D يضم x_0 بحيث،من أجل كل x من I ، $f(x) \ge f(x_0)$.

في هذه التعاريف، $f(x_0)$ تدعى قيمة حدية للدالة f عند x_0 .

✱ **النهايـــات**

نهايات دوال مألوفة

الدوال $n \in N^*$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$
مجموعة التعريف	R	R_+	R	R^*
النهاية عند $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+
النهاية عند $-\infty$	$+\infty$ n/ ز $-\infty$ n/ ف	غير موجود	$+\infty$	0^+ n/ ز 0^- n/ ف
النهاية عند x_0 $x_0 \in R$	x_0^n	$\sqrt{x_0}$ حيث $x_0 \ge 0$	$\lvert x_0 \rvert$	حالة $x_0 = 0$ $+\infty$ n/ ز $+\infty$ n/ ف

الدوال $n \in N^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto \frac{1}{\lvert x \rvert}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$
مجموعة التعريف	R_+^*	R^*	R	R
النهاية عند $+\infty$	0^+	0^+	غير موجود	غير موجود
النهاية عند $-\infty$	غير موجود	0^+	غير موجود	غير موجود
النهاية عند x_0 ، $x_0 \in R$	$x_0 > 0 / \frac{1}{\sqrt{x_0}}$	$\frac{1}{\lvert x_0 \rvert}$ حيث $x_0 \neq 0$	$\sin x_0$	$\cos x_0$

للحفظ

إذا كان $P(x)$ كثير الحدود فإن $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ من أجل كل x_0 من R .

عند $-\infty$ أو $+\infty$، الكثير الحدود له نفس نهاية وحيد الحد الأعلى درجة في عبارته.

إذا كان $Q(x)$ كسر ناطق فإن $\lim\limits_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0)$ من أجل كل x_0 من D_Q .

عند $-\infty$ أو $+\infty$ ، الكسر الناطق له نفس نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأعلى درجة في بسطه على وحيد الأعلى درجة في مقامه.

- **النهايات والمقارنة**

الرمز α يشير إلى عدد حقيقي، $-\infty$ أو $+\infty$. l عدد حقيقي، f ، g ، h ثلاث دوال عددية معرّفة على المجال I .(جوار α)

إذا كـــان [من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وكانت $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = l$]

فـــإن [$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$]. (الحصر)

إذا كـــان [من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x)$ وكانت $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$]

فـــإن [$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$].

إذا كان [من أجل كل x من I ، $f(x) \leq h(x)$ وكانت $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = -\infty$]

فـــإن [$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$].

- **العمليات على النهايات**

الرمز α يشير إلى عدد حقيقي، $-\infty$ أو $+\infty$. l و l' عددان حقيقيان.

f و g دالتان عدديتان معرّفتان على المجال I .(جوار α)

نهايات المجموع

نهاية f هي	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
نهاية g هي	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية $(f+g)$ هي	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	غير معيّنة	

نهايات الجداء

نهاية f هي	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g هي	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
نهاية $(f \times g)$ هي	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهايات حاصل القسمة (في حالة نهاية g غير معدومة)

نهاية f هي	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
نهاية g هي	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهايات حاصل القسمة (في حالة نهاية g معدومة)					
نهـاية f هي	$l>0$ أو $+\infty$	$l>0$ أو $+\infty$	$l<0$ أو $-\infty$	$l<0$ أو $-\infty$	0
نهـاية g هي	0^+	0^-	0^+	0^-	0
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهايات شهيرة

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

◆ **المستقيمات المقاربة**

الرمز α يشير إلى $-\infty$ أو $+\infty$. f وَ g دالتان عدديتان معرّفتان على الأقل على أحد المجالين $]\alpha;+\infty[$ أو $]-\infty;\alpha[$

(C_f) وَ (C_g) تمثيلاهما البيانيان.

تعريف

التمثيلان البيانيان (C_f) وَ (C_g) متقاربان عند α يكـافئ:
$\lim_{x\to\alpha}[f(x)-g(x)]=0$

نتائج

- المستقيم الذي معادلته $y=mx+p$ مقارب للمنحني (C_f) عند α **معنـاه** $\lim_{x\to\alpha}[f(x)-(mx+p)]=0$

إذا كان $m\neq 0$ **فـإن** المستقيم المقارب يكون مائلاً.

إذا كان $m=0$ **فـإن** المستقيم المقارب معادلته $y=p$ يكون مواز لحامل محور الفواصل.

- **إذا كان** $\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha$ **فإن** المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ مقارب للمنحني (C_f) ويوازي حامل محور التراتيب.

★ **الاستمرارية**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I.

- f مستمرة عند x_0 **معنـاه** $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- f مستمرة عند x_0 من اليمين **معنـاه** $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)=f(x_0)$.
- f مستمرة عند x_0 من اليسار **معنـاه** $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)=f(x_0)$.

مبرهنة

f مستمرة عند x_0 **معنـاه** f مستمرة عند x_0 من اليمين ومن اليسار.

◆ **امتداد دالة بالاستمرار**

f دالة معرّفة ومستمرة على المجموعة D وَ x_0 عدد حقيقي حيث: $x_0\notin D$. l عدد حقيقي إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ ، فإن الدالة g المعرّفة على $D\cup\{x_0\}$ بما يلي:
$g(x)=f(x)$ من أجل $x\in D$ وَ $g(x_0)=l$ تدعى امتداد للدالة f بالاستمرار عند x_0.

للحفظ

f وَ g دالتان مستمرتان على المجموعة D (عند كل x_0 من D).

- الدالتان $(f+g)$ وَ $(f\times g)$ مستمرتان على D .
- إذا كانت g لا تنعدم على D فإن: الدالتان $\frac{1}{g}$ وَ $\frac{f}{g}$ مستمرتان على D .
- إذا كانت u مستمرة عند x_0 وكانت v مستمرة عند $u(x_0)$ فإن الدالة $(v\circ u)$ مستمرة عند x_0 .
- الدوال: $|f|$ ، $\sqrt{f}$ ، $\sin f$ ، $\cos f$ ، $\tan f$ مستمرة على مجموعة تعريفها.

◆ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال K الذي حداه $f(a)$ وَ $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[a;b]$.

ملحوظة: إضافة إلى f مستمرة في $[a;b]$،إذا كانت f رتيبة تماما على $[a;b]$ فإن للمعادلة $f(x)=k$ حلا وحيدا.

تعمم هذه المبرهنة في حالة f مستمرة على مجال مفتوح أو نصف مفتوح، محدود أو غير محدود، في هذه الحالة حدا المجال K يمكن أن يكونا نهايات f عند طرفي $[a;b]$.

★ **الاشتقاقية**

◆ العدد المشتق

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I.

f تقبل الاشتقاق عند x_0 **إذا وفقط إذا** تحقق احد الشروط الثلاثة المتكافئة التالية:

- يوجد عدد حقيقي k وَ دالة ε معرّفة على I بحيث:
  من أجل كل x من I، $f(x)=f(x_0)+k(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$
  وَ $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.
- يوجد عدد حقيقي k وَ دالة θ معرّفة على I بحيث:
  من أجل كل h من I، $f(x_0+h)=f(x_0)+hk+h\theta(h)$
  وَ $\lim_{h\to0}\theta(h)=0$.
- الدالة g المعرّفة على $I-\{x_0\}$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة k عند x_0.

العدد الحقيقي k يدعى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز: $f'(x_0)=k$

الدالة $h\mapsto f(x_0)+hf'(x_0)$ تدعى تقريب تآلفي للدالة $h\mapsto f(x_0+h)$ بجوار 0.

للحفظ

لدينا $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ونكتب كذلك

$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (بوضع $x-x_0=h$)

الكتابة التفاضلية $dy=f'(x)dx$

لدينا $f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ......(1)

بوضع: $\Delta_y=f(x_0+h)-f(x_0)$ وَ $\Delta_x=h$ تكتب العلاقة (1) بالشكل:

$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ أي $f'(x_0)=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}+\theta(h)$ وَ $\lim_{h\to0}\theta(h)=0$

يعني $\Delta_y=f'(x_0)\Delta_x-\Delta_x\theta(\Delta_x)$ وَ $\lim_{\Delta_x\to0}\theta(\Delta_x)=0$

عندما يكون المقدار Δ_x قريب من الصفر، يكون لدينا: $\Delta_y\approx f'(x_0)\Delta_x$ ونرمز بـ: $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=f'(x_0)$

ويمكننا أن نستعمل الرمز: $\frac{\Delta f}{\Delta_x}$ بدل الرمز f'. ونكتب: $f'(x_0)=\frac{\Delta_f}{\Delta_x}(x_0)$

الدالة المشتقة

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجموعة D وقابلة للاشتقاق على المجموعة D' (عند كل قيمة x_0 من D')حيث: $D'\subset D$

الدالة التي ترفق بكل عدد x من D' ،العدد المشتق $f'(x)$ تدعى الدالة **المشتقة الأولى** (أو **المشتقة**) للدالة f. ويرمز لها: f'.

نتيجة

إذا كانت الدالة f' بدورها تقبل الاشتقاق على D'' حيث: $D''\subset D'$، فباستعمال التعريف السابق توجد الدالة المشتقة للدالة f' يرمز لها f'' وتدعى الدالة **المشتقة الثانية** للدالة f.

بنفس الطريقة يمكننا الحديث عن الدالة المشتقة الثالثة،الرابعة،... للدالة f.

مبرهنة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على المجموعة D ، فإن هذه الدالة مستمرة على D .

إنتبه عكس هذه المبرهنة غير صحيح

◆ معادلة المماس للمنحني

تعريف

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 ، فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يدعى المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 . **$f'(x_0)$ يدعى معامل توجيه المماس** Δ.

ملاحظة: f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I .

إذا كانت الدالة g المعرّفة على $I - \{x_0\}$ بـ: $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية غير محدودة $(+\infty / -\infty)$ عند x_0 ، (أو عند x_0^+ / x_0^-).

فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 وَ تمثيلها البياني يقبل مماسا (نصف مماس) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، يوازي حامل محور التراتيب.

◆ مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto k$	R	R	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	R	R	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	R	R	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	R	R	$x \mapsto 3x^2$
$n \in N^* / x \mapsto x^n$	R	R	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	R*	R*	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$n \in N^* / x \mapsto \frac{1}{x^n}$	R*	R*	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto \sqrt{x}$	R_+	R_+^*	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	R	R	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	R	R	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

العمليات على الدوال المشتقة

f وَ g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجموعة D .

الدالة	الدالة المشتقة	الشروط
$f + g$	$f' + g'$	/
kf	kf'	$k \in R^*$
fg	$f'g + g'f$	/
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$ على كامل D
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	$g \neq 0$ على كامل D
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	$a \in R^*$ وَ $b \in R$
$x \mapsto f[h(x)]$	$x \mapsto h'(x) \times f'[h(x)]$	h دالة تقبل الاشتقاق على E حيث: $h(E) \subset D$
f^n	$nf'f^{n-1}$	$n \in Z^*$ وَ f لاتنعدم من أجل $n < 0$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	f موجبة تماما على كامل D

الدوال كثير الحدود والناطقة تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها

◆ **المشتقة واتجاه تغيّر الدالة**

للحفظ

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.

f متزايدة تماما على I **معناه** من أجل كل x من I، $f'(x)>0$.

f متناقصة تماما على I **معناه** من أجل كل x من I، $f'(x)<0$.

f ثابتة على I **معناه** من أجل كل x من I، $f'(x)=0$.

ملاحظة: f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$.

- إذا كان من أجل كل x من $]a;b[$، $f'(x)>0$ فـإن f متزايدة تماما على $[a;b]$.
- إذا كان من أجل كل x من $]a;b[$، $f'(x)<0$ فـإن f متناقصة تماما على $[a;b]$.

◆ **العدد المشتق من اليمين ومن اليسار**

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عنصر من I.

- f تقبل الاشتقاق من يمين x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة φ المعرّفة على $I-\{x_0\}$ بـ: $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة k_1 عند يمين x_0. ونرمز: $k_1=f'_d(x_0)$

$f'_d(x_0)$ هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثّل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

- f تقبل الاشتقاق من يسار x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة φ المعرّفة على $I-\{x_0\}$ بـ: $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة k_2 عند يسار x_0. ونرمز: $k_2=f'_g(x_0)$

$f'_g(x_0)$ هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثّل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

مبرهنة

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عنصر من I.

f تقبل الاشتقاق عند x_0 **إذا وفقط إذا** قبلت الاشتقاق من يمين x_0 ومن يسار x_0 وكان: $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

★ **الدوال الأصلية**

تعريف

f و F دالتان معرّفتان على المجال I.

F دالة أصلية للدالة f على المجال I، إذا وفقط إذا كانت الدالة F تقبل الاشتقاق على I، ودالتها المشتقة هي f.

أي من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

للحفظ

مبرهنـة: (وجود دوال أصلية لدالة)

كل دالة f مستمرة على المجال I، تقبل على الأقل دالة أصلية F على I.

خاصـة:

- إذا قبلت الدالة f على المجال I دالة أصلية F، فإن الدالة f تقبل على I عدد غير منته من الدوال الأصلية كلها من الشكل:

$$x\mapsto F(x)+k \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي}$$

- إذا قبلت الدالة f على المجال I دالة أصلية F، فإنه من أجل كل ثنائية $(x_0;y_0)$ حيث $x_0\in I$ و $y_0\in\mathbb{R}$، توجد دالة أصلية F_0 وحيدة للدالة f على المجال I والتي تأخذ القيمة y_0 عند x_0.

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية $k\in\mathbb{R}$ /
$(a\in\mathbb{R})$ / $x\mapsto a$	$x\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ax+k$
/ $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\})$	$x\in\mathbb{R}$ من أجل $n>0$ $x\in\mathbb{R}_+^*$ أو $x\in\mathbb{R}_-^*$ من أجل $n<0$	$x\mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
/ $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z})$	$x\in\mathbb{R}_+^*$	$x\mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x\in\mathbb{R}_+^*$	$x\mapsto 2\sqrt{x}+k$

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية / $k \in R$
$x \mapsto \sin x$	$x \in R$	$x \mapsto -\cos x + k$
$x \mapsto \cos x$	$x \in R$	$x \mapsto \sin x + k$
$x \mapsto \sin(ax+b)$ / $a \neq 0$	$x \in R$	$x \mapsto \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + k$
$x \mapsto \cos(ax+b)$ / $a \neq 0$	$x \in R$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$
$x \mapsto -\frac{1}{\sin^2 x}$	$l \in Z$ / $x \in]l\pi;(l+1)\pi[$	$x \mapsto \cot g\, x + k$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$l \in Z$ / $x \in]-\frac{\pi}{2}+l\pi;\frac{\pi}{2}+l\pi[$	$x \mapsto \tan x + k$

◆ عمليات على الدوال الأصلية

f ، g ، f' ، g' دوال معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال I	الشروط	دالة أصلية
af' حيث $(a \in R)$	على I	af
$f'+g'$	على I	$f+g$
$f'g+g'f$	على I	fg
$-\frac{f'}{f^2}$	على I حيث $f \neq 0$	$\frac{1}{f}$
$n \in Z^* - \{-1\}$ / $f'f^n$	على I من أجل $n>0$ على I حيث $f \neq 0$ من أجل $n<0$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$
$n \in Q - \{-1\}$ / $f'f^n$	على I حيث $f>0$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	على I حيث $f>0$	$\sqrt{f}$
$(g' \circ f) \times f'$	على I و $f(I) \subset J$	$g \circ f$

تمــارين محــلولة

النهايات

1 احسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجالات تعريفها في كل حالة.

الدالة f معرّفة على R بالدستور: $f(x) = -4x^2 + x + 5$

الدالة g معرّفة على $R - \{-2;2\}$ بالدستور: $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

الدالة h معرّفة على R بالدستور: $h(x) = \frac{3-x}{x^2+2}$

الدالة k معرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $k(x) = x\sqrt{x + \frac{1}{x}}$

الحل: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}(-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

و $\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} g(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$

و $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}\left(\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}\right) = \lim_{x \to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0^+$

و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0^-$

$\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty\sqrt{+\infty + 0} = +\infty$

. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} k(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x^3 + x}$ [illegible]

الكتابة $\sqrt{x^2} = x$ تصحّ فقط من أجل $x \geq 0$.

قابلية الاشتقاق- حساب المشتقات

2	• ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 في الحالتين: $x_0 = 0$ و $f(x) = \lvert x \rvert$ ، $x_0 = -1$ و $f(x) = \sqrt{x+1}$ • عيّن الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية: الدالة g معرّفة على R بالدستور: $g(x) = -4x^2 + x + 5$. الدالة h معرّفة على R بالدستور: $h(x) = x^2\cos x$. الدالة k معرّفة على R بالدستور: $k(x) = (2x^2+5)^3$. الدالة l معرّفة على $R-\{-1;1\}$ بالدستور: $l(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$. الدالة p معرّفة على $R-\{-2\}$ بالدستور: $p(x) = \dfrac{-x^2+5}{x+2}$. الدالة q معرّفة على R بالدستور: $q(x) = \sqrt{x^2+x+2}$.

الحل: . $f(x) = \sqrt{x+1}$ معرّفة على $]-1;+\infty[$. إذاً ندرس قابلية الاشتقاق من يمين -1 فقط.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

يعني أن f لا تقبل الاشتقاق عند -1 .كون النهاية غير محدودة.

$f(x) = \lvert x \rvert$ معرّفة على R. ندرس قابلية الاشتقاق عند 0 من الجهتين.

من أجل $h \neq 0$ لدينا: $\dfrac{f(h+0) - f(0)}{h} = \dfrac{\lvert h \rvert}{h}$

إذاً: $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \dfrac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \dfrac{\lvert h \rvert}{h} = 1$ و $\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \dfrac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \dfrac{\lvert h \rvert}{h} = -1$

يعني أن الدالة f تقبل الاشتقاق من يمين 0 و تقبل الاشتقاق من يسار 0 وبما أن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ فإن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 . <u>هندسياً</u>: المنحني الممثّل للدالة f يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

. من أجل كل x من R، $g'(x) = -8x + 1$.

من أجل كل x من R، $h'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$.

من أجل كل x من R، $k'(x) = 3(2x^2+5)'(2x^2+5)^2 = 12x(2x^2+5)^2$

من أجل كل x من $R-\{-1;1\}$، $l'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

من أجل كل x من $R-\{-2\}$

$$p'(x) = \frac{(-x^2+5)'(x+2) - (x+2)'(-x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{-2x(x+2) - (-x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-5}{(x+2)^2}$$

من أجل كل x من R، $q'(x) = \dfrac{(x^2+x+2)'}{2\sqrt{x^2+x+2}} = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$

استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

3	الدالة f معرّفة على R بالدستور: $f(x) = -x^3 - x + 5$ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;2]$. هل هذا الحل وحيد؟

<u>الحل</u>: الدالة f مستمرة على R كونها كثير الحدود، وبالخصوص على $[0;2]$.

ولدينا: $f(0) = 5$ و $f(2) = -5$ وبالتالي: $f(0) \times f(2) < 0$

إذاً حسب مبرهنة القيم المتوسط ($k = 0$)، فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;2]$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على R كونها كثير الحدود، وبالخصوص على $[0;2]$.

لدينا: $f'(x) = -3x^2 - 1$ إذاً، من أجل كل x من R، $f'(x) < 0$ يعني f متناقصة تماما على R وبالخصوص على $[0;2]$. وبالتالي الحل وحيد.

محور التناظر لمنحنى دالة

4	الدالة f معرّفة على R بالدستور: $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$. بيّن أن المستقيم الذي معادلته $x = -2$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

الحل: (الطريقة 1) نجري تغيير للمعلم من $(O;\vec{i};\vec{j})$ إلى $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\Omega(-2;0)$
وتستخرج معادلة للمنحني (C_f) في المعلم الجديد، ثم نبيّن أنها معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية.
M نقطة من المستوي إحداثياها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، وإحداثياها $(X;Y)$ في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.
إذاً دساتير تغيير المعلم هي: $\begin{cases} x = X-2 \\ y=Y \end{cases}$ (تستخرج من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$)
$M\in(C_f)$ معناه $y=-x^2-4x+1$ يكافئ $Y=-(X-2)^2-4(X-2)+1$
أي $Y=-X^2+5$
الكتابة الأخيرة هي معادلة للمنحني (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$،
نعتبر الدالة g المعرّفة على R بالدستور: $g(x)=-x^2+5$
الدالة g زوجية كون: من اجل كل x من R، $-x\in R$ و $g(-x)=g(x)$.
وبالتالي المستقيم الذي معادلته $x=-2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f).
(الطريقة 2) نبيّن أنه من اجل كل x من R، $(-2-x)\in R$ و $(-2+x)\in R$ و $f(-2+x)=f(-2-x)$ (تحقق من ذلك).

تمارين للتدريب

1. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{-2\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{5x-1}{2+x}$

احسب نهايات f عند أطراف مجالات التعريف، ثم استنتج أن هناك مستقيمات مقاربة للمنحني الممثّل للدالة f، يطلب معادلاتها.

الدالة g معرّفة على المجموعة $R-\{1\}$ بالدستور: $g(x)=\frac{-x^2+2x-4}{x-1}$

بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=-x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني الممثّل للدالة g.

الدالة h معرّفة على المجموعة $R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بالدستور: $h(x)=\frac{6x^2-7x+3}{2x-1}$

عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث: من أجل كل x من $R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$،

$h(x)=ax+b+\frac{c}{2x-1}$، ثم استنتج أن المنحني الممثّل للدالة h يقبل مستقيم مقارب يطلب إعطاء معادلته.

2. حول حساب النهايات.

الدالة f معرّفة بالدستور	أحسب نهايات f عند
$f(x)=\frac{2x^2+5}{\lvert x\rvert-1}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 1 و -1
$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 1
$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$	$+\infty$ و 2
$f(x)=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x)=x+\sin x$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x)=\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$	0

3. الدالة f معرّفة على المجموعة $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ بالدستور:
$f(x)=x-\sqrt{x^2-4}$
اكتب معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثّل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة -3.
أعط معادلة لكل من نصفي المماس للمنحني (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين -2 و 2.

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

• الدالة f معرّفة على المجموعة R بالدستور: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث: a، b و c أعداد حقيقية.

عيّن الأعداد a، b و c حتى يكون: $f(2)=2$، $f(4)=-4$، $f'(4)=0$.

ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني (C_f) في المجال $[0;8]$.

• عيّن الدالة g كثير الحدود من الدرجة الثانية، علما أن المستقيم الذي معادلته $y=2x-\frac{3}{2}$ هو مماس للمنحني (C_g) الممثّل للدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1، وأن $g(2)=2$.

ادرس تغيرات الدالة g وارسم تمثيلها البياني (C_g) في المجال $[0;8]$.

أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) في المجال $[0;8]$.

5. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{0\}$ بالدستور: $f(x)=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

• بيّن أن الدالة f فردية.

• نسمي g اختصار للدالة f على المجال $I=]0;+\infty[$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

احسب نهايات g عند 0 و عند $+\infty$.

• بيّن أن الدالة g متزايدة على I.

• نضع: $h(x)=g(x)-x$. أحسب نهاية h عند $+\infty$ وترجم هندسيا النتيجة.

• احسب $\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-1}{x}$. ما هو مسار المنحني (C_g) بجوار النقطة ذات الإحداثيات $(0;1)$

• أنشئ المنحنيين (C_f) و (C_g).

6. عيّن الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة:

$f(x)=\frac{1}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}}$ و $I=]-\frac{1}{2};+\infty[$ ، $f(x)=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$ و $I=]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\cos^4 x\sin x$ و $I=R$ ، $f(x)=x\sqrt{x+2}$ و $I=]-2;+\infty[$

$f(x)=\sin^5 x\cos^4 x$ و $I=R$ ، $f(x)=\sin^3 x+\cos^2 x$ و $I=R$

7. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{-1\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{x^3+x^2-x}{(x+1)^2}$

عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c حتى يكون، من أجل كل x من $R-\{-1\}$،

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$$

استنتج الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من اجل $x=1$.

8. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{-1;0;1\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

• بيّن أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c بحيث: من أجل كل x من $R-\{-1;0;1\}$، $f(x)=x+\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$

• ادرس تغيرات الدالة f، وعيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) وكذا مركز تناظره.

• حل المعادلتين: $f(x)=0$ و $f(x)=x$ ثم أرسم (C_f).

• نعتبر الدالة كثير الحدود g المعرّفة على R بالدستور:

$g(x)=x^4-ax^3-6x^2+ax+1$ و $a\in R$

تحقق -باستعمال النتائج السابقة حول تغيرات الدالة f- أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل أربعة حلول حقيقية وذلك مهما كان العدد a.

9. الدالة f_m معرّفة على المجموعة R بالدستور: $f_m(x)=\frac{(x+m)(3x+10m)}{(x+2m)^2}$

حيث m وسيط حقيقي

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة f_m، وعيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m).

ادرس وضعية (C_m) بالنسبة للمستقيم المقارب للمنحني (C_m) والموازي لحامل محور الفواصل.

ما يمكن القول عن المنحني (C_0)؟

نفرض أن $m \neq 0$. ما هي إحداثيات I_m نقطة تقاطع المنحني (C_m) مع مستقيمه المقارب الأفقي؟

تعرّف على مجموعة النقط I_m عندما تتغيّر m .

10. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر المثلث ABC المتساوي الساقين رأسه الأساسي A ، تحيط به الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1. النقطة B تقع فوق محور الفواصل. يرمز H إلى المسقط العمودي للنقطة A على الحامل (BC) .

العدد الحقيقي α يمثّل قيسا بالراديان للزاوية $(\vec{i};\overrightarrow{OB})$ حيث $\alpha \in [0;\pi]$.

- ما هي إحداثيات النقطة B ؟

  عبّر عن الطولين BH و AH بدلالة α .

  استنتج مساحة المثلث ABC بدلالة α .

- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;\pi]$ بالدستور: $f(x) = (1+\cos x)\sin x$.

  أ- عيّن مشتقة الدالة f ، وبيّن أنه من أجل كل x من المجال $[0;\pi]$ ،

  $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

  أستنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0;\pi]$ ، $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

  ب- أدرس إشارة العدد $f'(x)$ ، ثم ارسم جدول تغيرات الدالة f .

- بيّن أنه توجد قيمة للعدد α من اجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن.

  تعرّف على هذه المساحة العظمى.

- ما هي إذاً طبيعة المثلث ABC ؟

3- الدالة الأسية- الدالة اللوغاريتمية

ما يجب أن يعرف:

الـدالة الأسيــة

تعريف

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f التي تقبل الاشتقاق على R وتحقق المعادلة $f' = f$ و $f(0) = 1$.

يرمز لها exp ونكتب: $f(x) = \exp(x)$ أو $f(x) = e^x$

وعموما: من اجل k عدد حقيقي، توجد دالة وحيدة f تقبل الاشتقاق على R وتحقق المعادلة $f' = kf$ و $f(0)=1$.

معرّفة بالدستور: $f(x) = e^{kx}$

للحفظ

خواص جبرية

x ، a ، b ثلاثة أعداد حقيقية.

$e^0 = 1$ ، $e^1 = e$ ، $e^x > 0$ ، $e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ ، $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ ، $n \in Z / e^{nx} = (e^x)^n$

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ ، $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$

خواص تحليلية

الدالة exp معرّفة وقابلة للاشتقاق على R .

من أجل كل x من R ، $(e^x)' = e^x$

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على D فإن الدالة e^f تقبل الاشتقاق على D . ولدينا: $(e^f)' = f'e^f$

الدالة exp متزايدة تماما على R . بجوار 0 ، $e^h \approx 1 + h$

★ الدالة اللوغاريتم النبيري

تعريف

الدالة اللوغاريتم النبيري ويرمز لها ln هي دالة التقابل العكسي للدالة الأسية، ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد الحقيقي $\ln x$ والذي عدده الأسي يساوي x.

أي من أجل $x \in R$ و $y \in]0;+\infty[$: ($e^x = y$ يكـــافئ $x = \ln y$)

$\ln e^x = x$ و $e^{\ln y} = y$

للحفظ — **خواص جبرية**

a و b عددان حقيقيان موجبان تماماً.

- $\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$
- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$
- $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $n \in Z \ / \ \ln(a^n) = n\ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

للحفظ — **خواص تحليلية**

f دالة عددية معرّفة وقابلة للاشتقاق على D.

- الدالة ln معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- إذا كانت $f \neq 0$ على D فإن $(\ln|f|)' = \frac{f'}{f}$.
- إذا كانت $f > 0$ على D فإن $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.
- بجوار 0، $\ln(1+h) \approx h$.

للحفظ

الدالة ln متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

من أجل a و b عنصران من $]0;+\infty[$ ، $\ln a = \ln b$ يكـــافئ $a = b$.

$\ln a < \ln b$ يكـــافئ $a < b$.

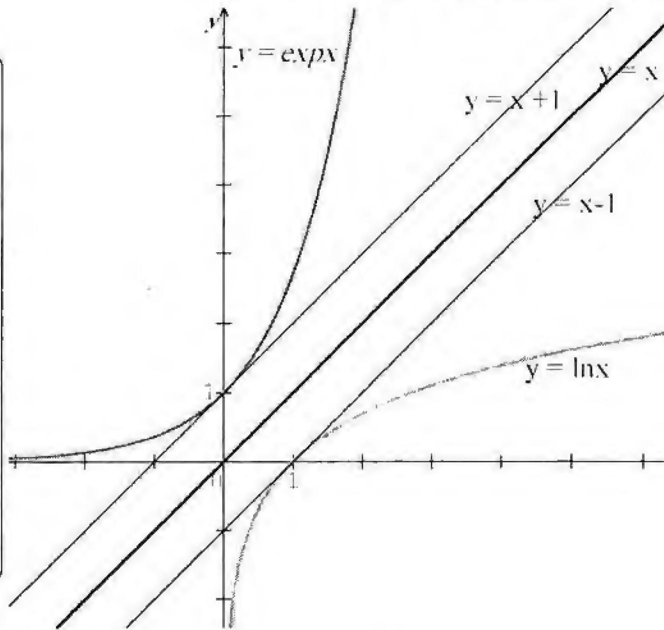
حالة خاصة

$\ln a < 0$ يكـــافئ $0 < a < 1$.

$\ln a > 0$ يكـــافئ $a > 1$.

◆ التمثيل البياني للدالتين الأسية واللوغاريتم النبيري

للدالتين الأسية واللوغاريتم النبيري تمثيلان بيانيان متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$ (المنصف الأول) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



$y = x+1$ هي معادلة المستقيم المماس للمنحني الممثّل للدالة exp عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y = x-1$ هي معادلة المستقيم المماس للمنحني الممثّل للدالة ln عند النقطة ذات الفاصلة 1.

◆ **نهايات الدالتين exp وَ ln**

للحفظ

الدالة الأسية	الدالة اللوغاريتم النيبيري
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$	$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$	$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$
$n\in N^* \ / \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$n\in N^* \ / \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$
$n\in N^* \ / \ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$	$n\in N^* \ / \ \lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

في جوار لانهاية، الدالة الأسية تتفوق على دالة القوة ذات الأس الحقيقي، وتتفوق دالة القوة ذات الأس الحقيقي على الدالة اللوغاريتم النيبيري

◆ **اللوغاريتم العشري**

تعريف دالة اللوغاريتم العشري يرمز لها log ، ومعرّفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\log 10 = 1$

◆ **الدالة الأسية ذات الأساس a**

تعريف a عدد حقيقي موجب تماما حيث $a \neq 1$.

الدالة الأسية ذات الأساس a ، (دالة القوة الحقيقية) هي الدالة العددية التي يرمز لها $\exp_a$ والمعرّفة على R بـ: $\exp_a x = e^{x\ln a}$

ونكتب : من أجل كل x من R ، $e^{x\ln a} = a^x$ (تجاوزاً)

للحفظ

a وَ a' عددان حقيقيان موجبان تماما ويختلفان عن 1.

x وَ y عددان حقيقيان.

$$1^x = 1 \ , \ a^0 = 1 \ , \ a^{x+y} = a^x a^y \ , \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \ , \ (aa')^x = a^x a'^x \ , \ \left(\frac{a}{a'}\right)^x = \frac{a^x}{a'^x}.$$

◆ **دالة الجذر النوني**

تعريف n عدد طبيعي غير معدوم.

دالة الجذر النوني، هي الدالة التي نرمز لها $\sqrt[n]{\ }$ والمعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

لدينا: من أجل كل x وَ y من $[0;+\infty[$ ، $x = y^n$ **يكافئ** $y = \sqrt[n]{x}$.

للحفظ

x وَ y عددان من $[0;+\infty[$ ، n وَ m عددان طبيعيان حيث $n \neq 0$

خواص جبرية

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ يكافئ $x = y$ / $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ يكافئ $x < y$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ ، $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ حيث $y \neq 0$ ، $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$.

خواص تحليلية

- دالة الجذر النوني $\sqrt[n]{\ }$ معرّفة على $[0;+\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

تمـــارين محـــلولة

مجموعة التعريف للدوال اللوغاريتم النيبيري والدوال الأسية

1	عيّن مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغيّر الحقيقي x في كل حالة مما يلي: $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$ ، $f(x)=\frac{\ln(-3x+9)}{\ln x-1}$ $f(x)=\frac{e^x+1}{e^{-x}-1}$ ، $f(x)=\ln\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)$ ، $f(x)=e^{\frac{-x^2+1}{x}}$ $f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$ ، $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$ ، $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

الحل: $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $(2x^2-3x+1)>0$

أي $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$ إذاً: $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$f(x)=\frac{\ln(-3x+9)}{\ln x-1}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان

$(-3x+9)>0$ وَ $x>0$ وَ $\ln x-1\neq 0$

أي $x<3$ وَ $x>0$ وَ $x\neq e$ إذاً: $D_f=]0;e[\cup]e;3[$

$f(x)=\frac{e^x+1}{e^{-x}-1}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $e^{-x}-1\neq 0$ أي $-x\neq 0$

إذاً: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$f(x)=\ln\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $2x^2-3x>0$ أي

$x\in]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ إذاً : $D_f=]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$f(x)=e^{\frac{-x^2+1}{x}}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $x\neq 0$ إذاً: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)>0$

أي $x\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$ إذاً: $D_f=\left]-1;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$f(x)=\sqrt{\ln x-1}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $x>0$ وَ $\ln x-1>0$ أي $x>0$ وَ $x>e$ إذاً: $D_f=]e;+\infty[$

$f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ ، f معرّفة إذا وفقط إذا كان $e^x-1>0$ أي $x>0$

إذاً: $D_f=]0;+\infty[$.

معادلات ومتراجحات لوغاريتمية و أسية

2	حل في R المعادلات والمتراجحات التالية.	
	$\ln(2x+1)=2\ln(x-1)$	$\ln\sqrt{2x-3}>\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$
	$(e^{x-1}+2)(e^{x+2}-1)=0$	$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\geq\frac{1}{e^2}$
	$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$	$e^x<e^{-x}+1$ ، $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 0$

الحل: $\ln(2x+1)=2\ln(x-1)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x+1>0$ وَ $x-1>0$

أي $x\in]1;+\infty[$

$\ln(2x+1)=2\ln(x-1)$ تكافئ $(2x+1)=(x-1)^2$ أي $x=0$ أو $x=4$.

بما أن $0\notin]1;+\infty[$ فإن مجموعة الحلول $S=\{4\}$.

$(e^{x-1}+2)(e^{x+2}-1)=0$ معرفة على كامل R

$(e^{x-1}+2)(e^{x+2}-1)=0$ تكافئ $(e^{x+2}-1)=0$ كون $(e^{x-1}+2)\neq 0$

تكافئ $x=-2$ إذاً مجموعة الحلول $S=\{-2\}$.

$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$ معرفة على كامل R

$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$ تكافئ ($X=e^{3x}$ وَ $X^2-4X+3=0$)

تكافئ ($X=e^{3x}$ و $X=1$ أو $X=3$)

تكافئ ($e^{3x}=1$ أو $e^{3x}=3$) تكافئ ($x=0$ أو $x=\frac{1}{3}\ln3$)

إذاً: مجموعة الحلول $S=\left\{0;\frac{1}{3}\ln3\right\}$.

$\ln\sqrt{2x-3}>\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-3>0$ و $6-x>0$ و $x>0$

أي $x\in\left]\frac{3}{2};6\right[$

$\ln\sqrt{2x-3}>\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$ تكافئ $\sqrt{2x-3}>\frac{6-x}{\sqrt{x}}$ أي $2x^2-3x>(6-x)^2$

تكافئ $x^2+9x-36>0$ أي $x\in]-\infty;-12[\cup]3;+\infty[$

إذاً: مجموعة الحلول $S=(]-\infty;-12[\cup]3;+\infty[)\cap\left]\frac{3}{2};6\right[$ أي $S=]3;6[$.

$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\ge\frac{1}{e^2}$ معرفة على كامل R

$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\ge\frac{1}{e^2}$ تكافئ $e^{2x+1}\ge e^{3x+1}$ أي $2x+1\ge3x+1$ يكافئ $x\le0$

إذاً: مجموعة الحلول $S=R$

$e^x<e^{-x}+1$ معرفة على كامل R

$e^x<e^{-x}+1$ تكافئ $e^{2x}-e^x-1<0$ تكافئ ($e^x=X$ و $X^2-X-1<0$)

تكافئ $e^x\in\left]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ أي $x\in\left]-\infty;\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ و $S=\left]-\infty;\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$

$\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\ge0$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x-1}{2x-3}>0$ أي $x\in]-\infty;1[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\ge0$ تكافئ $\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\ge1$ أي $(-x+2)(2x-3)\ge0$ أي $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$

وبالتالي: $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]\cap\left(]-\infty;1[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)$. إذاً: مجموعة الحلول $S=\left]\frac{3}{2};2\right]$.

حساب مشتقات لدوال لوغاريتمية أو أسية

3 عيّن الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln\frac{1}{x}$ ، $f(x)=\ln(-4x^2+1)$ ، $f(x)=x(\ln x^2)$

$f(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$ ، $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x+2}$ ، $f(x)=\ln(e^x-1)$ ، $f(x)=2^x$.

الحل: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln\frac{1}{x}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=x-2\frac{-1}{x^2}\times x=x+\frac{2}{x}.$$

$f(x)=\ln(-4x^2+1)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ ، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(-4x^2+1)'}{(-4x^2+1)^2}=\frac{-8x}{(-4x^2+1)^2} ،$$

$f(x)=x(\ln x^2)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على R-{0}، ولدينا:

$$f'(x)=(\ln x^2)+(\ln x^2)'x=\ln x^2+2 ،$$

$f(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;1[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{1-x^2}.$$

$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x+2}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على R، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}+1)'(e^x+2)-(e^x+2)'(e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{3x}+4e^{2x}-e^x}{(e^x+2)^2}.$$

$f(x)=\ln(e^x-1)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

ولدينا: $f'(x)=\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}$.

$f(x)=2^x$ وتكتب $f(x)=e^{x\ln 2}$، f قابلة للاشتقاق على R، ولدينا: $f'(x)=(\ln 2)e^{x\ln 2}=2^x\ln 2$.

حساب النهايات

4	احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف للدالة f في كل حالة. f معرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x-2\ln x$. f معرّفة على R بالدستور: $f(x)=x+1-e^x$. f معرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$. f معرّفة على R بالدستور: $f(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}$.

الحل: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-2\ln x)=0-2(-\infty)=+\infty$ ،

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=+\infty(1+0-\infty)=-\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-e^x\right)=-\infty+1-0=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1+x}{x}-1}=1 ،\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(1+x)\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1+x}{x}}=0 .$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x+1}{e^x+1}\right)=\frac{0+1}{0+1}=1 ،\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x+1}{e^x+1}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2X+1}{X+1}\right)=2$$

الحساب على القوى الحقيقية والجذور النونية

5	بسّط الكتابتين التاليتين: $a=\frac{\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}}$ ، $b=\frac{2^{\sqrt{3}}\times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}$

الحل: $a=\frac{\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{5}{12}}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-\frac{5}{12}}=9$.

$b=\frac{2^{\sqrt{3}}\times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}=2^{\sqrt{3}}\times\left(2^3\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times 2^{\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$.

تمارين للتدريب

1. حل في R المعادلات والمتراجحات التالية.

$e^x-2e^{\frac{x}{2}}-5=0$ ، $e^{2x}-4e^{-2x}=3$ ، $\frac{e^{2x}+2e^x-4}{2-3e^x}=-1$

$\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$ ، $(\ln x)^2-3\ln x-28=0$

$e^{2x^2-3x-5}\geq e^4$ ، $\frac{3e^{2x}-5e^x-1}{e^{2x}-4}\leq 1$ ، $\ln|x-1|-\ln 5\geq\ln\frac{1}{|x+5|}$

$\ln\sqrt{4-x^2}\leq\frac{1}{2}\ln 3x$ ، $e^{2x}+e^x>2$

2. حل في R×R كلا من الجمل التالية.

$\begin{cases}\ln(xy)=3\\(\ln x)(\ln y)=2\end{cases}$ ، $\begin{cases}\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\ln y}=\frac{7}{3}\\ \ln(xy)=\frac{7}{2}\end{cases}$ ، $\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=1\end{cases}$ ، $\begin{cases}e^x+e^y=5\\ e^{2(x+y)}=36\end{cases}$ ،

$\begin{cases}\ln x-2\ln y=\ln 2\\ \frac{e^x}{e^5}=\left(\frac{1}{e^y}\right)^3\end{cases}$ ، $\begin{cases}e^x\times e^y=a^2\\ xy=1\end{cases}$

(ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب a)

3. حساب النهايات

الدالة f معرّفة بالدستور	احسب نهاية f عند
$f(x)=\frac{e^{x}}{x}-x$	$-\infty$ و $+\infty$ و 0
$f(x)=e^{2x}-e^{x}$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{3x}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 0
$f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x+4}$	$+\infty$
$f(x)=\frac{\ln\left(x^{2}+x+1\right)}{2x}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 0
$f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x)=x-\ln\left\|2e^{x}-1\right\|$	$-\infty$ و $+\infty$

4. f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=2\ln x-(\ln x)^{2}$
- ادرس تغيرات الدالة f ، ثم حل المعادلة $f(x)=0$.
- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C) الممثّل للدالة f ، عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
- أرسم (T) و (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

5. g الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=1-x^{2}-\ln x$
- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- f الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x$. (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة f .(نستعين بنتائج السؤال الأول)
- أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x$.
- بيّن أنه توجد نقطة وحيدة A من المنحني (C_f) يكون المماس عندها للمنحني (C_f)

يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين إحداثياتها. أنشئ (Δ) و (C_f) .

6. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{x+1}{-x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- بيّن أن النقطة A ذات الإحداثيات $(1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f)، ثم أنشئ (C_f).
- g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالدستور: $g(x)=\frac{e^{x}+1}{-e^{x}+1}$

بيّن أن الدالة g فردية، ثم احسب نهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.
- تعرّف على اتجاه تغيّر الدالة g وارسم تمثيلها البياني (C_g) في المستوي (P).
- h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*-\{e\}$ بالدستور: $h(x)=\frac{\ln x+1}{-\ln x+1}$

أدرس تغيرات h ، ثم بيّن أن h تقابل من المجال $[1;\sqrt{e}]$ نحو $[1;3]$.

استخرج عبارة $h^{-1}(x)$ من أجل $x\in[1;3]$.

7. f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x)=e^{x}-x-4$
- ادرس تغيرات الدالة f . بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $x+y+4=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .
- أرسم (C_f) و (D) .

8. f الدالة العددية المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x-\ln(x+1)$
- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني. استنتج إشارة الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.
- باستعمال إشارة f ، تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا: $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)<\frac{1}{n}$
- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا: $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}<e$

9. f الدالة العددية المعرّفة على $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- ادرس تغيرات الدالة f.
- بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x-\ln 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
- ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).
- ارسم المستقيم (D) والمنحني (C_f).
- g الدالة العددية المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=f(|x|)$.
- علّل زوجية الدالة g.
- باستعمال الدراسة السابقة للدالة f، ارسم جدولا كاملا لتغيرات للدالة g.
- اشرح كيف يمكننا رسم التمثيل البياني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f).
- ارسم (C_g).

10. f الدالة العددية المعرّفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=e^{x}-x & /x<0 \\ f(x)=\cos^2 \pi x & /0\le x\le 1 \\ f(x)=1+\frac{\ln x}{x} & /x>1 \end{cases}$$

ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f. ثم تغيرات الدالة f وارسم (C_f).

4- المتتاليات العددية

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات

تعريف

n_0 عدد طبيعي معطى.

المتتالية العددية u هي كل دالة من N نحو R، والتي ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0، العدد الحقيقي $u(n)$.

المجموعة I حيث $I=\{n: n\in N / n\ge n_0\}$ تدعى مجموعة تعريف المتتالية العددية u. (مجال من N يبدأ من n_0)

يرمز كذلك للمتتالية العددية u بـ: $(u_n)_{n\ge n_0}$ أو $(u_n)_{n\in I}$.

أو يستعمل الرمز (u_n) مع ذكر مجموعة تعريفها.

يرمز كذلك للعدد الحقيقي $u(n)$ بـ: u_n ويدعى الحد العام للمتتالية العددية u.

◆ طريقتي توليد متتالية عددية

تتعيّن متتالية عددية بإحدى الطريقتين:

- تعطى عبارة حدها العام، أي عبارة u_n بدلالة n (دستور الدالة f) ونكتب: $u_n=f(n)$.

  f تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية u.
- تعطى علاقة بين حدود متعاقبة للمتتالية العددية(تدعى علاقة تراجعية).

  – هنا نكتفي بالعلاقة بين حدين متتاليين- ونكتب: $u_{n+1}=f(u_n)$.

  f تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية u.

  f تحقق أنه من أجل كل x من D_f لدينا: $f(x)\in D_f$ وَ $u_{n_0}\in D_f$.

◆ **اتجاه تغيّر متتالية عددية.**

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n : n\in N / n\geq n_0\}$

وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

(u_n) متزايدة تماما على I **معناه** [من أجل كل n من I ، $u_{n+1}-u_n>0$].

(u_n) متناقصة تماما على I **معناه** [من أجل كل n من I ، $u_{n+1}-u_n<0$].

(u_n) متزايدة على I **معناه** [من أجل كل n من I ، $u_{n+1}-u_n\geq 0$].

(u_n) متناقصة على I **معناه** [من أجل كل n من I ، $u_{n+1}-u_n\leq 0$].

(u_n) تابثة على I **معناه** [من أجل كل n من I ، $u_{n+1}-u_n=0$].

طريقة

لتعيين اتجاه تغيّر متتالية عددية على I ، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

أو نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1، وهذا فقط في حالة (u_n) موجبة تماماً.

حالة خاصة1.

من أجل المتتالية المعرّفة بـ: $u_n=f(n)$ على المجموعة $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$.

إذا كانت الدالة f متزايدة (أو متناقصة) على $[n_0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة (أو متناقصة) على I .

أنتبه: عكس هذه النتيجة غير صحيح

حالة خاصة2.

من أجل المتتالية المعرّفة بــالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=f(u_n)$ على المجموعة $I=\{n : n\in N / n\geq n_0\}$

لدينا: $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=f(x)-x$ ، للتعرّف على اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-x$ على المجموعة D_f .

أو لدينا: $u_{n+2}-u_{n+1}=f(u_{n+1})-f(u_n)$ ، للتعرّف على اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) يكفي دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على D_f .

◆ **المتتالية العددية المحدودة**

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M **إذا وفقط إذا** كان من أجل كل n من I ، $u_n\leq M$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي m **إذا وفقط إذا** كان من أجل كل n من I ، $u_n\geq m$.
- المتتالية (u_n) محدودة **إذا وفقط إذا** كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

◆ **متتاليات مرجعية ونهاياتها**

المتتاليات المعرّفة بحدها العام n^2 ، n^3 ، $\sqrt{n}$ هي مرجعية نهايتها هي $+\infty$.

المتتاليات المعرّفة بحدها العام $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n^2}$ ، $\frac{1}{n^3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{n}}$ هي مرجعية نهايتها هي 0 .

◆ **المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة**

تعريف

المتتالية العددية **المتقاربة** نحو العدد الحقيقي l هي التي تقبل نهاية محدودة l عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

المتتالية العددية **المتباعدة** هي المتتالية العددية غير المتقاربة.

طريقة

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- للبرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 . يمكننا أن نبيّن أنه:

يوجد عدد طبيعي n' بحيث،(**إذا كان** $n\geq n'$ **فــإن** $|u_n|\leq kv_n$)

حيث: (v_n) متتالية مرجعية متقاربة نحو 0،وَ $k\in R$.

- للبرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l . يمكننا أن نبيّن أن المتتالية (u_n-l) متقاربة نحو 0 . ويمكننا أن نبيّن كذلك أنه: يوجد عدد طبيعي n' بحيث: (**إذا كان** $n\geq n'$ **فــإن** $w_n\leq u_n\leq v_n$)

حيث: (v_n) وَ (w_n) متتاليتان مرجعيتان متقاربتان نحو l .

مبرهنة1

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة.

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متتالية متقاربة.

◆ المتتاليتان المتجاورتان

تعريف: (u_n) وَ (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان **معناه** (u_n) متزايدة وَ (v_n) متناقصة وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)=0$

مبرهنة2

كل متتاليتين متجاورتين هما متتاليتين متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي l.

ملاحظة

- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ وَ $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث (u_n) متزايدة وَ (v_n) متناقصة فإنه، من أجل كل عدد طبيعي n من $I \cap I'$ لدينا: $u_n \le v_n$.
- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ وَ $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث (u_n) متزايدة وَ (v_n) متناقصة وكانت لهما نفس النهاية l فإنه، من أجل كل عدد طبيعي n من $I \cap I'$ لدينا: $u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$

مبرهنة3

(u_n) متتالية معرّفة بـالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = f(u_n)$.

إذا كانت (u_n) متقاربة نحو l وكانت الدالة f مستمرة عند l فإن، $f(l) = l$

◆ المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n : n\in N / n\ge n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- المتتالية (u_n) حسابية حدها الأول u_{n_0} وأساسها r إذا وفقط إذا كانت معرّفة بـ: $u_{n+1} = u_n + r$ من أجل كل n من I (العلاقة التراجعية)
  أو $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$ من أجل كل n من I (عبارة الحد العام)
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I ، لدينا: $u_n = u_p + (n-p)r$
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I حيث: $p \le n$ ،
  لدينا: $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \dfrac{n-p+1}{2}(u_n + u_p)$
  $(n-p+1)$ يمثّل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من u_p إلى u_n.
- التمثيل البياني للمتتالية الحسابية (u_n) هو مجموعة النقط $M(n;u_n)$ التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه الأساس r.

◆ المتتالية الهندسية

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n : n\in N / n\ge n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- المتتالية (u_n) هندسية حدها الأول u_{n_0} وأساسها q إذا وفقط إذا كانت معرّفة بـ: $u_{n+1} = u_n \times q$ من أجل كل n من I (العلاقة التراجعية)
  أو $u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$ من أجل كل n من I (عبارة الحد العام)
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I ، لدينا: $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I حيث: $p \le n$ ،
  لدينا: $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$ حيث $q \ne 1$.
  $(n-p+1)$ يمثّل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من u_p إلى u_n.

نهايات متتالية هندسية:

إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ ، إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ ، إذا كان $q \le -1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة

◆ **البرهان بالتراجع**

P_n خاصية متعلّقة بالعدد الطبيعي n من المجموعة I حيث: $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$

وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

للبرهان بالتراجع على أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل n من I، نتّبع المراحل الثلاث التالية:

① نتحقق من صحّة الخاصية P_{n_0} (هذه المرحلة تدعى **بداية التراجع**)

② نفرض أن الخاصية P_n صحيحة إلى غاية الرتبة k حيث: $k\geq n_0$.

(هذه المرحلة تدعى **فرضية التراجع**)

③ نبرهن أن الخاصية P_{k+1} صحيحة. (هذه المرحلة تدعى **برهان التراجع**)

(المرحلتين ② وَ ③ تدعى استلزام التراجع)

تمـارين محـلولة

البرهان بالتراجع

1	برهن بالتراجع صحّة العبارتين التاليتين. من أجل كل n من N^*، $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. من أجل كل n من N، $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7.

الحل: من أجل كل n من N^*، $\underbrace{1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}_{P_n}$.

نتحقق من صحة الخاصية P_1. $P_1: 1^2=\frac{1}{6}1(1+1)(2\times1+1)$ محققة

نفرض صحة الخاصية P_n إلى الرتبة k حيث: $1\leq k$. أي أن:

$1^2+2^2+...+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ صحيحة فرضاً.

نبرهن صحّة الخاصة P_{k+1} أي نبيّن أن: $1^2+2^2+...+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

لدينا:

$$1^2+2^2+...+(k+1)^2=1^2+2^2+..k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

من أجل كل n من N، $\underbrace{3^{2n}-2^n=7\alpha \quad \alpha\in N/}_{P_n}$

نتحقق من صحة الخاصية P_0. $P_0: 3^0-2^0=1-1=0=7\times0$ محققة

نفرض صحة الخاصية P_n إلى الرتبة k حيث: $k\geq0$. أي أن:

$3^{2k}-2^k=7\alpha \quad \alpha\in N/$ صحيحة فرضاً.

نبرهن صحّة الخاصة P_{k+1} أي نبيّن أن: $3^{2(k+1)}-2^{(k+1)}=7\beta \quad \beta\in N/$

لدينا:

$$3^{2(k+1)}-2^{(k+1)}=3^2\times3^{2k}-2\times2^k=9(7\alpha+2^k)-2\times2^k$$
$$=63\alpha+7\times2^k=7(9\alpha+2^k)=7\beta$$

حيث $\beta=(9\alpha+2^k)\in N$

اتجاه تغيّر متتالية عددية

2	تعرّف على اتجاه تغيّر المتتالية العددية في كل حالة. (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $u_n=\frac{n+4}{n+2}$. (k_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. (v_n) متتالية عددية معرّفة على N بحدها الأول $v_0=1$ والعلاقة التراجعية: $v_{n+1}=2+\ln v_n$

الحل: (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $u_n=\frac{n+4}{n+2}$

لدينا: من اجل كل n من N، $u_{n+1}-u_n=\frac{n+5}{n+3}-\frac{n+4}{n+2}=\frac{-2}{(n+2)(n+3)}<0$

إذاً المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على N.

• (k_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

(يمكن العمل بطريقة المثال الأول كما يمكن العمل بالطريقة التالية)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $R-\{-1\}$ بالدستور $f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ وندرس اتجاه تغيراتها فقط على R_+.

من أجل كل x من R_+، $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^3}>0$ أي f متزايدة تماما على R_+؟

وبالتالي المتتالية (k_n) متزايدة تماماً على N.

• (v_n) متتالية عددية معرّفة على N بحدها الأول $v_0=1$ والعلاقة التراجعية: $v_{n+1}=2+\ln v_n$.

للتعرّف على تغيراتها نتبع ما يلي:

نعتبر الدالة f المعرّفة على R_+^* بالدستور $f(x)=2+\ln x$ وندرس اتجاه تغيراتها على R_+^*.

اتجاه تغير الدالة f نفسه اتجاه تغير الدالة ln كون: $f=\ln+2$ إذاً f متزايدة تماما على R_+^*.

لدينا: $v_{n+1}-v_n=f(v_n)-f(v_{n-1})$ نعتمد إذاً على اتجاه تغيّر الدالة f وعلى البرهان بالتراجع لمقارنة v_{n+1} وَ v_n.

$v_0=1$ وَ $v_1=2$ أي $v_1>v_0$ (بداية التراجع)

نفرض ان $v_{k+1}>v_k$ حيث $k\in N$ (فرضية التراجع)

وبما أن f متزايدة تماما على R_+^* فإن $v_{k+1}>v_k$ تستلزم $f(v_{k+1})>f(v_k)$ أي $v_{k+2}>v_{k+1}$ (برهان التراجع)

إذاً: من اجل كل n من N، $v_{n+1}>v_n$ وبالتالي: (v_n) متزايدة تماما على N.

دراسة تقارب متتالية عددية

3

• بيّن أن المتتاليات العددية التالية متقاربة.

(u_n) معرّفة على N^* بالعبارة: $u_n=\frac{n+4}{n^2}$.

(v_n) معرّفة على N بالعبارة: $v_n=\frac{n^2-1}{n^2-n+2}$.

(k_n) معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\frac{n-11}{2^n}$.

(w_n) معرّفة على N بالعبارة: $w_n=\frac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$.

• بيّن أن المتتالية (h_n) المعرّفة على N بالعبارة: $h_n=\frac{n^3-1}{n^2+2}$ متباعدة

الحل: (u_n) معرّفة على N^* بالعبارة: $u_n=\frac{n+4}{n^2}$.

نعتبر الدالة f المعرّفة على R^* بالدستور $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$. لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

إذاً: $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$، وبالتالي، (u_n) متقاربة نحو 0.

(v_n) معرّفة على N بالعبارة: $v_n=\frac{n^2-1}{n^2-n+2}$. نعتبر الدالة f المعرّفة على R بالدستور $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x+2}$. ولدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$.

إذاً: $\lim_{n\to+\infty}v_n=1$. وبالتالي، (v_n) متقاربة نحو 1.

(k_n) معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\frac{n+11}{2^n}$.

نلاحظ أنه: من اجل كل n من N، $\frac{n+11}{2^n}>0$. معناه أن المتتالية (k_n) محدودة من الأسفل.

ولدينا: $k_{n+1}-k_n=\frac{1}{2^{n+1}}(n+12-2n-22)=-\frac{n+10}{2^{n+1}}<0$ معناه أن المتتالية

(k_n) متناقصة تماما على N .

كون المتتالية (k_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل ، فهي متقاربة.

(w_n) معرّفة على N بالعبارة: $w_n=\frac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$. ولدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} w_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}=\frac{0+0}{0-1}=0$$

يعني أن (w_n) متقاربة نحو 0 .

المتتالية (h_n) المعرّفة على N^* بالعبارة: $h_n=\frac{n^3-1}{n^2+2}$ متباعدة كون

$\lim_{n\to+\infty} h_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^2}=+\infty$ (نهاية غير محدودة).

المتتاليتان المتجاورتان

4

(u_n) وَ (v_n) متتاليتان معرّفتان على N^* بـــ:

$u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ وَ $v_n=u_n+\frac{1}{n}$

بيّن أن المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان.

الحل: لدينا من اجل كل n من N ،

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

و لدينا من اجل كل n من N ، $v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)=\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$

يعني أن (u_n) متزايدة تماما على N وَ أن (v_n) متناقصة تماما على N .

وكذلك لدينا: $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ إذاً المتتاليتان (u_n) وَ(v_n) متجاورتان.

المتتالية الهندسية

5

نعرّف المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) على المجموعة N بـــ: $u_0=1$ ،

$v_0=2$ وَ من أجل كل n من N ،

$u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ وَ $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

- نضع: $w_n=v_n-u_n$ من أجل كل n من N .
  بيّن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين نهايتها والتعبير w_n عن بدلالة n .
- عبّر عن العددين $u_{n+1}-u_n$ وَ $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n ، واستنتج اتّجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) .
- بيّن أن المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية l .
- نضع: $t_n=3u_n+10v_n$ من أجل كل n من N . بيّن أن المتتالية (t_n) ثابتة واستنتج قيمة l .

الحل: واضح أن (w_n) متتالية عددية كمجموع المتتاليتين (u_n)- وَ (v_n) .

من أجل كل n من N ،

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}-\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15}$$
$$=\frac{2}{15}w_n$$

يعني أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0=v_0-u_0=1$

بما أن $\frac{2}{15}\in\left]-1;1\right[$ فإن $\lim_{+\infty} w_n=0$. ولدينا من أجل كل n من N ،

$w_n=w_0\left(\frac{2}{15}\right)^n=\left(\frac{2}{15}\right)^n$.

من أجل كل n من N ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}=\frac{2}{3}w_n$

وَ $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n=\frac{u_n+4v_n-5v_n}{5}=-\frac{1}{5}w_n$

بما أنه من أجل كل n من N، $w_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n>0$. فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وَ $v_{n+1}-v_n<0$

أي (u_n) متزايدة تماما على N وَ (v_n) متناقصة تماما على N.

حسب ما سبق لدينا (u_n) متزايدة تماما على N وَ (v_n) متناقصة تماما على N وَ $\lim_{+\infty}(v_n-u_n)=0$ هذا يعني أن

المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان، وبالتالي فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l.

من أجل كل n من N، $t_{n+1}=3u_{n+1}+10v_{n+1}=3\frac{u_n+2v_n}{3}+10\frac{u_n+4v_n}{5}=t_n$

يعني أن المتتالية (t_n) ثابتة.

إذاً: $\lim_{+\infty}t_n=\lim_{+\infty}t_0=23$ ومن جهة أخرى

$$\lim_{+\infty}t_n=\lim_{+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$$

منه $13l=23$ أي $l=\frac{23}{13}$.

تمارين للتدريب

1. نقبل أن الكثير حدود ذو المعاملات الحقيقية $P(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$ يحقق المساواة التالية: من اجل كل x من R، $P(x+1)-P(x)=x^2$

- بدون تعيين العددين a وَ b أحسب $P(0)$؛ $P(1)$، $P(-1)$. احسب إذاً العددين a وَ b.
- برهن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N، $P(n)$ عدد طبيعي.
- نضع: $S_1=1$، وَمن أجل كل n من N، $S_n=1+2^2+...+n^2$ بيّن أن
$$S_n=P(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
- (u_n) متتالية معرّفة على N بـ: $u_0=0$ وَمن أجل كل n من N، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$
- برهن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N، المتتالية (u_n) موجبة.
- اكتشف وبرهن بالتراجع اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$.

2. (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بـ: $u_0=8$ وَمن اجل كل n من N،
$$u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n}$$

- مثّل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الدالة $f:x\mapsto\frac{5x-4}{x}$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.
- مثّل بيانيا الحدود u_0، u_1، u_2. هل يمكننا التوقع بتقارب المتتالية (u_n)؟
- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل، ثم عيّن نهايتها.

3. من اجل كل n من $N-\{0.1\}$، نعرّف على المجال $]0.+\infty[$ الدالة f_n بالدستور $f_n(x)=x^n(2\ln x-1)$

- عيّن الدالة المشتقة f'_n، ثم بيّن أنها تنعدم مرة واحدة على المجال $]0.+\infty[$ عند العدد الحقيقي α_n يطلب تعيينه.
- بيّن أنه من اجل كل n من $N-\{0.1\}$، $1\le\alpha_n<\sqrt{e}$.
- ادرس اتّجاه تغيّر المتتالية العددية (α_n)، ثم حدد سلوكها بجوار $+\infty$.

4. (u_n) متتالية عددية موجبة معرّفة على N^* بـ: $u_1=1$ وَمن اجل كل n من $N^*-\{1\}$، $n^2u_n^2-(n-1)^2u_{n-1}^2=n$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على N^* بـ: $v_n=n^2u_n^2$. عيّن v_n بدلالة n وَاستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعيّن نهايتها.

5. (u_n) متتالية معرّفة على N بـ: $u_0=-1$ وَمن أجل كل n من N،
$$u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n}$$

- بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3. بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.
- $(v_n)_{n\in N}$ متتالية معرّفة بـ: $v_n=\frac{-1}{3-u_n}$ بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية، يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

أحسب v_n ثم u_n بدلالة n، ثم أوجد نهاية (u_n).

6. (u_n) متتالية معرّفة على N^* بـ: $u_1 = 7$ وَمن أجل كل n من N^*،

$u_{n+1} = au_n + 5$ حيث: $a \in R$.

نضع: من اجل كل n من N^*، $v_n = u_n - 6$

- عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.
- فيما يلي نعتبر $a = \frac{1}{6}$، احسب إذن v_n بدلالة n ثم نهاية (v_n).
- نضع: $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$، أحسب S_n بدلالة n، وادرس تقارب المتتالية $(S_n)_{n\in N^*}$، ثم احسب نهايتها.

7. نعرّف متتاليتين عدديتين u وَ v بـ: $u_1 = 1$ وَ $v_1 = 12$

وَمن اجل كل n من N^*، $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ وَ $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$.

- من اجل كل n من N^* نضع: $w_n = v_n - u_n$ بيّن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
- أحسب w_1 ثم عبّر عن w_n بدلالة n، أحسب $\lim_{n\to+\infty} w_n$.
- بيّن أن المتتالية u متزايدة وأن المتتالية v متناقصة، بالاستعانة بالسؤال الأول.
- ماذا تستنتج عن المتتاليتين u وَ v ؟.
- من اجل كل n من N^* نضع: $k_n = 8v_n + 3u_n$ بيّن أن المتتالية (k_n) ثابتة.
- استنتج نهايتي كلا u وَ v.

8. g الدالة المعرّفة على $]-3;+\infty[$ بالدستور: $g(x) = \ln(x+3)$.

- ادرس تغيرات الدالة g.
- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بـ: $u_0 = 1$ وَمن أجل كل n من N،

$u_{n+1} = g(u_n)$

باستعمال السؤال الأول ـــ تعرّف على اتجاه تغير المتتالية (u_n).

- بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2. هل هي متقاربة؟ تعرّف على $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بـ: $v_0=2$ وَمن أجل كل n من N، $v_{n+1} = g(v_n)$

بيّن أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1. هل هي متقاربة؟ تعرّف على $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

- بيّن أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$، استنتج أن المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان.
- f الدالة المعرّفة على R بالدستور: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ وَ h الدالة المعرّفة على R بالدستور: $h(x) = f(x) - \frac{x}{2}$.

ادرس تغيرات الدالة h، واستنتج إشارة العدد $h(x)$ حسب قيم x.

- (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بـ: $w_0 = 1$ وَمن أجل كل n من N،

$w_{n+1} = f(w_n)$

بيّن أنه: من أجل كل n من N، $0 \le w_{n+1} \le \frac{1}{2} w_n$ واستنتج أن: $0 \le w_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

تعرّف على $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

9. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ وَمن أجل كل n من N، $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

- بيّن أنه: من أجل كل n من N، $0 \le u_n \le 3$.

واستنتج أن هذه المتتالية (u_n) معرّفة فعلا على N.

- نضع: $a_n = u_{2n}$ وَ $b_n = u_{2n+1}$ من اجل كل n من N.

ادرس اتجاه تغيّر المتتاليتين العدديتين (a_n) وَ (b_n).

- بيّن أنه: من أجل كل n من N، $b_n \le 1 \le a_n$.
- استنتج أن المتتالية (u_n) إذا تقاربت فهي تتقارب نحو 1.

10. (k_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $k_0 = 1$ وَمن أجل كل n من N،

$k_{n+1} = \sin k_n$

- بالاستعانة بالحاسبة، أعط تخمينا حول سلوك المتتالية (k_n).
- بيّن أنه: من أجل كل n من N، $k_n \in [0;1]$
- ادرس إشارة الدالة $x \mapsto x - \sin x$ على المجال $[0;1]$ واستنتج اتجاه تغيّر المتتالية (k_n).
- ماذا يمكننا أن نستنتج فيما يخص المتتالية (k_n)؟

5- الحساب التكامـــــلي

ما يجب أن يعرف:

★ التكامل المحدود

تعريف

f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x و F دالة أصلية لها على المجال I. ليكن a وَ b عددان من I.

التكامل (من a إلـــــى b) للدالة f هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

ونرمز: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$

★ خواص التكامل المحدود

f وَ g دالتان مستمرتان على المجال I. a، b، c أعداد من I.

◆ **علاقة شال**

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

ينتج أن: $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

◆ **الخطـــية**

$k\in\mathbb{R}$/ $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

◆ **المتباينات والتكامل المحدود**

في حالة $a\le b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $f(x)\ge 0$ **فـــإن** $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

في حالة $a<b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $]a;b[$، $f(x)>0$ **فـــإن** $\int_a^b f(x)dx>0$

وعمومـــــاً

في حالة $a\le b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $f(x)\ge g(x)$ **فـــإن**

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

في حالة $a<b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $]a;b[$، $f(x)>g(x)$ **فـــإن**

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

◆ **القيمـــة المتوســـطة**

إذا كان $a<b$ **فـــإن** القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

◆ **حصر القيمـــة المتوســـطة**

في حالة $a<b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $m\le f(x)\le M$ **فـــإن**

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

★ التكامل بالتجزئة

f وَ g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I، و المشتقتين f' وَ g' مستمرتين على المجال I. a وَ b عددان من I.

لدينا: $$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

مبرهنة1

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال I فـــإنه من أجل كل عدد a من I، الدالة F المعرّفة بـــ: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f على المجال I والتي تنعدم عند a.

★ **حساب المساحات**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$، نضع: $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ وَ $OIKJ$ مستطيل.
مساحة المستطيل $OIKJ$ تمثّل وحدة القياس للمساحات في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. ونرمز: $u.a$

◆ التفسير الهندسي للتكامل المحدود

f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x. a وَ b عددان من I حيث: $a \le b$
التكامل من a إلى b للدالة $|f|$ هو المساحة A للحيّز المستوي المحصور بين المنحني (C_f) الممثل للدالة f وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a$ وَ $x=b$.

- في حالة $f \ge 0$ في المجال $[a;b]$: لدينا $A=\int_a^b f(x)dx\,(u.a)$
- في حالة $f \le 0$ في المجال $[a;b]$: لدينا $A=-\int_a^b f(x)dx\,(u.a)$

◆ مساحة الحيّز المحصور بين منحنيين

f وَ g دالتان مستمرتان على المجال $[a;b]$. (C_f) وَ (C_g) تمثيلاهما البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.
المساحة A للحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) وَ (C_g) والمستقيمين الذين معادلتهما $x=a$ وَ $x=b$ يعطى بـــ:

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\,(u.a)$$

◆ حساب الحجوم

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نضع: $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$
القطع المستقيمة $[OI]$، $[OJ]$، $[OK]$ هي أضلاع في متوازي المستطيلات الذي حجمه يمثّل وحدة القياس للحجوم.

جسم S محدّد بالمستويين اللذين معادلتهما: $z=a$ وَ $z=b$. حيث: $a \le b$
كل مستو معادلته $z=x$ حيث: $x\in[a;b]$ يقطع الجسم S وفق مقطع مستو مساحته $s(x)$ (وحدة مساحة).
إذا كانت الدالة s مستمرة على المجال $[a;b]$ فإن الحجم V للجسم S يعطى بالعلاقة:

- $V=\int_a^b s(x)dx$ (وحدة الحجم).

نتيجة: f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ (C_f) تمثيلها البياني.
Γ الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات $y=0$، $x=a$ وَ $x=b$.
حجم الجسم الدوراني المولّد بدوران Γ حول محور الفواصل يعطى بالعبارة: $V=\int_a^b \pi f(x)dx$.

تمـــارين محـــلولة

حساب التكاملات

1
علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية:
$\int_{-1}^{2}(2x^3-x+2)dx$ ، $\int_2^0 t(t^2-1)dt$ ، $\int_2^{-3}e^{1-2x}dx$ ، $\int_e^1 x\ln x\,dx$
$\int_\pi^{\pi/2}2\cos u\sin^2 u\,du$ ، $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.

الحل: $\int_{-1}^{2}(2x^3-x+2)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=(8-2+4)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\right)=12$

$$\int_2^0 t(t^2-1)dt=\frac{1}{2}\int_2^0(t^2-1)'(t^2-1)dt=\frac{1}{4}\left[(t^2-1)^2\right]_2^0=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=-2$$

$$\int_2^{-3}e^{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_2^{-3}-2e^{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\left[e^{1-2x}\right]_2^{-3}=-\frac{e^7}{2}+\frac{e^{-3}}{2}$$

$\int_e^1 x\ln x\,dx$ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: ($f(x)=\ln x$ وَ $g'(x)=x$)
ينتج أن: ($f'(x)=\frac{1}{x}$ وَ $g(x)=\frac{1}{2}x^2$).

إذاً: $\int_e^1 x\ln x\,dx = \int_e^1 f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_e^1 - \int_e^1 g(x)f'(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_e^1 - \frac{1}{2}\int_e^1 x\,dx$

$$= -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(1-e^2\right) = -\frac{1}{4}\left(1+e^2\right)$$

$$\int_\pi^{\pi/2} 2\cos u \sin^2 u\, du = 2\int_\pi^{\pi/2} (\sin u)' \sin^2 u\, du = 2\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_\pi^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\int_0^\pi x\sin x\,dx$ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: ($f(x)=x$ وَ $g'(x)=\sin x$)

ينتج أن: ($f'(x)=1$ وَ $g(x)=-\cos x$)

إذاً: $\int_0^\pi x\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi g(x)f'(x)dx$

$$= \left[-x\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi$$

حساب التكاملات

2	علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية: $\int_1^2 \ln t\,dt$ ، $\int_0^1 \ln(t+2)dt$ ، $\int_0^\pi e^t \sin t\,dt$ $\int_\pi^0 e^t\cos 2t\,dt$ ، $\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2}dx$ ، $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$.

<u>الحل</u>: $\int_1^2 \ln t\,dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=1 \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=t \end{cases}$

إذاً: $\int_1^2 \ln t\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t)dt = \left[t\ln t\right]_1^2 - \left[t\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$.

$\int_0^1 \ln(t+2)dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln(t+2) \\ v'(t)=1 \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t+2} \\ v(t)=t+2 \end{cases}$

إذاً: $\int_0^1 \ln(t+2)dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)dt = \left[(t+2)\ln(t+2)\right]_0^1 - \int_0^1 dt$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

$I=\int_0^\pi e^t \sin t\,dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\sin t \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=-\cos t \end{cases}$

إذاً: $I=\int_0^\pi e^t \sin t\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)v(t)dt = \left[-e^t\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^t \cos t\,dt$

$$= e^\pi + 1 + J$$

نحسب من جديد التكامل $J=\int_0^\pi e^t \cos t\,dt$ بالتجزئة. نضع $\begin{cases} f(t)=e^t \\ g'(t)=\cos t \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} f'(t)=e^t \\ g(t)=\sin t \end{cases}$

إذاً: $J = \int_0^\pi e^t \cos t\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t)g(t)dt$

$$= \left[e^t \sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \sin t\,dt = -I$$

ينتج بالعودة إلى الحساب الأول: $I = e^\pi + 1 - I$ وبالتالي: $I=\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$

$K=\int_\pi^0 e^t \cos 2t\,dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\cos 2t \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=\frac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$

إذاً: $K=\int_\pi^0 e^t \cos 2t\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_\pi^0 - \int_\pi^0 u'(t)v(t)dt$

$$= \left[\frac{1}{2}e^t \sin 2t\right]_\pi^0 - \frac{1}{2}\int_\pi^0 e^t \sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}L$$

نحسب من جديد التكامل $L=\int_\pi^0 e^t \sin 2t\,dt$ بالتجزئة. نضع $\begin{cases} f(t)=e^t \\ g'(t)=\sin 2t \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} f'(t)=e^t \\ g(t)=-\frac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$.

إذاً: $L=\int_\pi^0 e^t \sin 2t\,dt = [f(t)g(t)]_\pi^0 - \int_\pi^0 f'(t)g(t)dt = \left[-\frac{1}{2}e^t\cos 2t\right]_\pi^0 + \frac{1}{2}\int_\pi^0 e^t\cos 2t\,dt$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^\pi+\frac{1}{2}K$$

ينتج بالعودة إلى الحساب الأول: $K=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^\pi-1\right)+\frac{1}{2}K\right]$ وبالتالي: $K=\frac{1}{5}\left(-e^\pi+1\right)$

$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2}dx$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln x \\ v'(t)=\frac{1}{x^2} \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{x} \\ v(t)=-\frac{1}{x} \end{cases}$

إذاً: $\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2}dx=[u(t)v(t)]_e^1-\int_e^1 u'(t)v(t)dt=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_e^1+\int_e^1\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{e}-1$.

$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=2\sqrt{t+1} \end{cases}$

إذاً: $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt=[u(t)v(t)]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt=\left[2t\sqrt{t+1}\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{t+1}\,dt$

$$=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{-2\sqrt{2}+4}{3}$$

حساب المساحات

3

نعتبر المنحني (C) الذي معادلته $y=\frac{-x^3+x}{x^2+1}$ في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) عند $+\infty$ وَ $-\infty$.
- احسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C) وَ المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=2$ وَ $x=-2$.

الحل: لدينا من اجل كل x من R، $y=\frac{-x^3+x}{x^2+1}=\frac{-x(x^2+1)+2x}{x^2+1}=-x+\frac{2x}{x^2+1}$

وبما أن: $\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=0$ فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=-x$ عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

الحيّز هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

$(-2\le x\le 0$ وَ $\frac{-x^3+x}{x^2+1}\le y\le -x)$ أو $(0\le x\le 2$ وَ $-x\le y\le \frac{-x^3+x}{x^2+1})$

مساحته هي $\int_0^2[y-(-x)]dx+\int_{-2}^0[-x-y]dx\quad (u.a)$

وهي: $\int_{-2}^0\frac{-2x}{x^2+1}dx+\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx\quad (u.a)=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-2}^0-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2$

$$=2\ln 5\quad (u.a)$$

حساب مساحة الحيّز المحصور بين منحنيين

4

f وَ g الدالتان المعرّفتان على R بـ: $f(x)=\cos x$ وَ $g(x)=\sin x$

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) وَ (C_g) الممثلين للدالتين f وَ g وبالمستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ وَ $x=\pi$.

الحل: مساحة الحيّز تعطى بالتكامل المحدود: $\int_0^\pi|\cos x-\sin x|dx\quad (u.a)$

و علما أنه: من اجل كل x من $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ فإن $\cos x-\sin x\ge 0$

و من اجل كل x من $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$ فإن $\cos x-\sin x\le 0$

إذاً: $\int_0^\pi|\cos x-\sin x|dx\,(u.a)=\left(\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\right)(u.a)$

$$=\left(\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\pi/4}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\pi/4}^{\pi}\right)(u.a)$$

$$=2\sqrt{2}(u.a)$$

حساب الحجم

5	نعتبر الدالة f للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ بالدستور $f(x)=\cos x$. نعتبر مساحة الحيّز Ω المستوي المحصور بين المنحني الممثّل للدالة f ومحور الفواصل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس. أحسب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران الحيّز Ω حول محور الفواصل.

الحل: لدينا

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi f^2(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 2x+1)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x+x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}(u.v)$$

تمارين للتدريب

1. احسب التكاملات المحدودة التالية بعد التأكد من وجودها.

$$\int_{\pi}^{0}-\sin 3x\,dx \;.\; \int_0^{\pi/4}\frac{2\,dt}{\cos^2 t} \;,\; \int_1^{\ln 2}\left(u-2+3e^{2u}\right)du \;.$$

$$\int_0^1\sqrt{3x+1}\,dx \;,\; \int_{\pi/4}^{\pi/6}\tan^2 x\,dx \;،\; \int_{-1}^{1}\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}dx \;,\; \int_1^0\frac{1-2x}{\sqrt{x^2-x+3}}dx$$

$$\int_2^3\frac{\ln x}{x}dx \;,\; \int_0^1 xe^{x^2}dx \;,\; \int_e^{e^2}\frac{dt}{t\ln t} \;,\; \int_0^{\pi/4}\tan^5 t\left(1+\tan^2 t\right)dt$$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملات المحدودة التالية:

$$\int_1^e t\ln t\,dt \;,\; \int_1^{-2}xe^{5x}dx \;,\; \int_2^0(x-2)e^{1+2x}dx \;.\; \int_1^e x^2\ln x\,dx \;.$$

$$\int_1^2(\ln t)^2dt \;.\; \int_2^1\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx \;،\; \int_1^0\frac{u}{\sqrt{2+u}}du \;,\; \int_{\pi}^{3\pi/2}x^2\cos 2x\,dx$$

$$\int_1^2\sin(\ln t)\,dt \;,\; \int_0^{\pi}e^t\sin t\,dt \;,\; \int_{-}^{1}(2x+3)^2e^x\,dx \;,\; \int_e^1 t(\ln t)^2\,dt$$

3. f الدالة المعرّفة على R^* بالدستور: $f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+3x+2}{x^2}$

اكتب الدالة f على شكل مجموع دوال بسيطة، ثم احسب $\int_2^1 f(x)\,dx$.

g الدالة المعرّفة على $R-\{-2;2\}$ بالدستور: $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

عيّن ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c بحيث من اجل كل x من $R-\{-2;2\}$ ،

$g(x)=a+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x+2}$. احسب إذاً : $\int_1 g(x)\,dx$

h الدالة المعرّفة على $R-\{2\}$ بالدستور: $h(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}$

عيّن ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c بحيث من اجل كل x من $R-\{2\}$ ،

$h(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$. احسب إذاً: $\int_{-1}^{0}h(x)\,dx$.

4. f الدالة المعرّفة على R^* بالدستور: $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

عيّن عددين حقيقيين a ، b بحيث من اجل كل x من R^* ، $f(x)=a+\dfrac{be^x}{e^x-1}$ ،

ثم أحسب $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5. احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في كل حالة:

$f(x)=2x^2+5x-1$ و $I=[-1.3]$ ، $f(x)=\ln(x-1)$ و $I=[2;4]$ ،

$f(x)=e^{3x}$ و $I=[0,3]$ ، $f(x)=\sin^2 x$ و $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f(x)=\cos^4 x$ و $I=\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ ، $f(x)=x^2e^{x^3}$ و $I=[-1,0]$

6. (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $u_n = 2\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1}\,dt$

- بيّن أنه من أجل كل n من N، $u_n \geq 0$.
- بيّن أنه من أجل كل n من N، $u_{n+1}+u_n = \frac{1}{n+1}$.
- احسب الحدود u_0، u_1، u_2.
- بيّن أن (u_n) متناقصة على N، واستنتج أنها متقاربة، ثم تعرّف على نهايتها.

7. f الدالة المعرّفة على $[-1,1]$ بالدستور: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

- ارسم التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- g الدالة المعرّفة على $[0,\pi]$ بالدستور: $g(x)=F(\cos x)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على $[-1,1]$.

بيّن أنه من أجل كل x من $[0,\pi]$، $g'(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x-1)$، ثم استنتج دالة أصلية للدالة g' على $[0,\pi]$.

- احسب بدلالة F العدد: $g(0)-g(\pi)$، ثم احسب $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

ماذا تمثل النتيجة المحصّل عليها؟

8. f الدالة المعرّفة على R بالدستور: $f(x)=-x+\frac{3}{2}+\frac{-x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

- ادرس تغيرات الدالة f، وبيّن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=-x+\frac{3}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
- ارسم (D) وَ (C_f).
- احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) وبالمستقيمين ذي المعادلتين $x=-1$ وَ $x=2$.

9. φ الدالة المعرّفة على R بالدستور: $\varphi(x)=(x-1)e^{x+1}$

(C_φ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

ادرس تغيرات الدالة φ و ارسم تمثيلها البياني (C_φ).

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_φ) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ وَ $x=-1$ وَ $x=\frac{3}{2}$.

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_φ) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ وَ $x=1$ وَ $x=-1$.

استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_φ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=\frac{3}{2}$ وَ $x=-1$.

10. f الدالة المعرّفة على R بـ: $f(0)=1$ وَ من اجل $x\neq 0$،

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

- بيّن أن الدالة f مستمرة على R، ثم أحسب العدد $f'(x)$ من أجل كل x من R^*.
- g الدالة المعرّفة على R بـ: $g(x)=e^x-xe^x-1$
- ادرس تغيرات الدالة g، وتعرّف على إشارة العدد $g(x)$ على R ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

أعط اتجاه تغيّر الدالة f.

- علّل وجود العدد $h(x)$ من أجل كل x من R حيث: $h(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$
- عبّر عن الدالة h باستعمال الدالة F حيث F هي دالة أصلية للدالة f على R.
- استنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق على R وبيّن أنه من أجل كل x من R،

$$h'(x)=\frac{x}{e^{2x}-1}(3-e^x)$$

- تعرّف على اتجاه تغيّر الدالة h.
- باستعمال خاصية الحصر للقيمة المتوسطة لدالة، بيّن أنه من أجل كل x من R^*، العدد $h(x)$ يقع بين $f(x)$ وَ $f(2x)$.

ميّز بين الحالتين $x<0$ وَ $x>0$. أحسب إذاً $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ وَ $\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}$،

ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} h(x)$.

6- الاحتمـالات

ما يجب أن يعرف:

★ العـــدّ

◆ عاملي عدد طبيعي

تعريف

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

عاملي n، هو العدد الطبيعي الذي نرمز له: $n!$ والذي يساوي جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى n.

نكتب: $n!=1\times 2\times 3\times \ldots \times n$. نقبل أن: $0!=1$

◆ عدّ السلاسل

تجربة عشوائية تكمن في سحب p عنصر على التوالي من وعاء U يحوي n عنصر.

الوعاء U يعتبر مجموعة ذات n عنصر، ومخارج هذه التجربة تشكّل سلاسل ذات p عنصر من U.

- **السحب بالإرجاع**

عدد السلاسل ذات p عنصر من U، هو: $n^p = \underbrace{n\times n\times \ldots \times n}_{p \text{ عامل}}$ (هذه السلاسل تدعى قوائم)

- **السحب بدون إرجاع**

عدد السلاسل ذات p عنصر **مختلفة** من U، هو: $\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\ldots\times(n-p+1)}_{p \text{ عامل}}$

(هذه السلاسل تدعى ترتيبات)

◆ توفيقـــات

تعريف E مجموعة ذات n عنصر، p عدد طبيعي حيث: $0\le p\le n$

توفيقة ذات p عنصر من E، هي مجموعة جزئية من E تظم p عنصر.

(تكرار العناصر غير ممكن وترتيبها غير مهم)

عدد التوفيقات ذات p عنصر من المجموعة E ذات n عنصر يرمز له $\binom{n}{p}$

أو C_n^p ويعطى بالعبارة: $C_n^p=\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

للحفظ

n وَ p عددان طبيعيان حيث: $0\le p\le n$

- $C_n^p=C_n^{n-p}\ ,\ \ C_n^1=n\ ,\ C_n^n=1\ ,\ C_n^0=1$
- من أجل $1<p\le n$،
  $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_n^p$ (قاعدة تشكيل مثلث باسكال)
- من أجل كل عددين حقيقيين a وَ b وَ من أجل كل n من N^*:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

دستور ثنائي الحد للنيوتن

★ الفضاء الاحتمالي المنته

◆ مجموعة الإمكانيات–الحوادث

تعريف نتائج التجربة العشوائية تشكّل مجموعة منتهية تدعى **مجموعة الإمكانيات**(مجموعة المخارج) يرمز لها Ω.

كل جزء A من المجموعة Ω يدعى **حادثة**.

مجموعة أجزاء Ω هي مجموعة **جميع الحوادث** المرتبطة بالتجربة العشوائية ويرمز لها $P(\Omega)$.

◆ مصطلحات على الحوادث

للحفظ

المصطلح الرياضي	المصطلح الاحتمالي
$A=\phi$	A الحادثة المستحيلة
$A=\Omega$	A الحادثة الأكيدة
$A=\{e_i\}$	A الحادثة الأولية
$\overline{A}$ متممة المجموعة A	$\overline{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة A
$A\cap B=\phi$	A وَ B حادثتان غير متلائمتين

◆ قانون الاحتمال– الاحتمال

تعريف

$\Omega=\{e_1;e_2;...;e_n\}$ مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية معيّنة ذات n مخرج.

قانون الاحتمال لتجربة عشوائية هو الدالة التي ترفق بكل حادثة أولية $\{e_i\}$ من $P(\Omega)$ عدد p_i من المجال $[0;1]$. حيث: $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

p_i يدعى احتمال تحقق الحادثة الأولية $\{e_i\}$. ونرمز له بـــ: $p_i=p(\{e_i\})$.

الاحتمال المرفق بهذا القانون هو الدالة p المعرّفة على $P(\Omega)$ بما يلي:

$p(\phi)=0$.

وفي حالة $A\neq\phi$ ، $p(A)$ هو مجموع الأعداد p_i من أجل كل مخرج e_i من A .

أي: $p(A)=\sum_{e_i\in A} p_i$. يدعى احتمال تحقق الحادثة A .

تعليقات

الاحتمال p هو **دالة** مجموعة تعريفها $P(\Omega)$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;1]$.

مجموعة الإمكانيات Ω مرفقة بالاحتمال p يرمز لها بـــ: $(\Omega;p)$ وتدعى **فضاء احتمالي منته**.

إذا كانت الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال p_0 فإننا نقول أن الحوادث **متساوية الاحتمال**. ولدينا $p_0=\frac{1}{Card(\Omega)}$ / $Card(\Omega)$ يرمز إلى عدد عناصر Ω .

◆ خواص الاحتمال

$(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته.

- $p(\Omega)=1$.
- إذا كانتا A وَ B حادثتين من الفضاء فإن: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- إذا كانت A حادثة من الفضاء فإن: $p(A)=1-p(\overline{A})$.

◆ المتغيّر العشوائي – قانون الاحتمال

تعريف $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته.

المتغيّر العشوائي X هو كل دالة معرّفة على مجموعة الامكانيات Ω وتأخذ قيمها في R .

$X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ تدعى مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X .

قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، هو الدالة التي ترفق بكل قيمة x_i من $X(\Omega)$ عدد p_i من المجال $[0;1]$. حيث:

$p_i=p(X=x_i)=\frac{Card(X=x_i)}{Card(\Omega)}$ وَ $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

◆ الأمل الرياضي – التباين – الانحراف المعياري

تعريف $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته. X المتغيّر العشوائي المعرّف على Ω وَ $X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ مجموعة قيمه.

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$ حيث $p_i=p(X=x_i)$

(يدعى كذلك المتوسط الحسابي ويرمز له $\overline{X}$)

- التباين للمتغير العشوائي X هو $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2$ حيث $p_i=p(X=x_i)$

ويعطى كذلك بـــ: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

★ الاحتمال الشرطي

تعريف

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته. A وَ B حادثتان من Ω حيث: $p(A)\neq 0$.

"احتمال تحقق B علما أن A تحقق" هو الاحتمال p_A المعرّف بمـا يلـي: $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$. p_A يدعى الاحتمال الشرطي علما A .

◆ الحوادث المستقلة

تعريف

$(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته. A وَ B حادثتان من Ω .

الحادثتان A وَ B مستقلتان عشوائيا **إذا وفقط إذا** كان

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

◆ دستور الاحتمالات الكليّة

مبرهنة1

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، A_1 ، A_2 ،...، A_n حوادث من هذا الفضاء تشكّل تجزئة له.

من أجل كل حادثة B من الفضاء $(\Omega; p)$ ، لدينا:

$$p(B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)+...+p(A_n)\times p_{A_n}(B)$$

أي: $p(B)=\sum_{i=1}^{i=n} p(A_i)\times p_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i\cap B)$

◆ المتـغيرات العشوائية المستقلّة

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، X وَ Y المتغيّران العشوائيان المعرّفان على Ω .

$X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ وَ $Y(\Omega)=\{y_1;y_2;...;y_m\}$ مجموعتا قيمهما.

X وَ Y مستقلان **معنـاه** من أجل كل $1\le i\le n$ وَ من أجل كل $1\le j\le m$ ، الحادثتان $(X=x_i)$ وَ $(Y=y_j)$ مستقلتان.

للحفظ

X وَ Y متغيران عشوائيان مستقلان

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ وَ $E(XY)=E(X)\times E(Y)$

◆ التجارب العشوائية المستقلّة

$(\Omega_1;p_1)$ ، $(\Omega_2;p_2)$ ،...، $(\Omega_n;p_n)$. n فضاء احتمالي منته لـ n تجربة عشوائية معيّنة.

n تجربة عشوائية تكون مستقلة **إذا وفقط إذا كان** احتمال سلسلة الحوادث (A_1 ، A_2 ،...، A_n) حيث A_i حادثة من Ω_i هو: $p_1(A_1)\times p_2(A_2)\times...\times p_n(A_n)$.

★ قوانين الاحتمالات

◆ قانون برنولي $(Bernoulli)$ – قانون ثنائي الحدّ $(binomiale)$

تعريف

نعتبر تجربة عشوائية ذات مخرجين A وَ $\overline{A}$ ، [يُدعيان النجاح والإخفاق].

ونضع: احتمال تحقق A هو α واحتمال تحقق $\overline{A}$ هو $(1-\alpha)$ حيث: $\alpha\in]0;1[$.

قانون برنولي B_α هو قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X والذي يرفق بالمخرج A القيمة 1 ويرفق بالمخرج $\overline{A}$ القيمة 0 .

التجربة العشوائية ذات مخرجين تدعى تجربة برنولي

◆ خواص

- من أجل قانون برنولي B_α للمتغيّر العشوائي X المعرّف سابقا:

أمله الرياضي هو: $E(X)=\alpha$. وَ تباينه هو: $V(X)=\alpha(1-\alpha)$.

- من أجل $\alpha\in]0;1[$. نكرّر تجربة برنولي العشوائية n مرة

— نفرض أن التجارب العشوائية مستقلة—

ونعتبر المتغير العشوائي Y الذي يأخذ كقيم، عدد المرات التي يتحقق فيها المخرج α .

تعـــريـــفا: قانون الاحتمال للتغيّر العشوائي Y يدعى **قانون ثنائي الحدّ** وسيطاه n وَ α، ويرمز له: $B_{(n;\alpha)}$. معرّف بـــما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $0 \le k \le n$ لدينا، $p(Y=k)=C_n^k\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$

و لدينا كذلك: $E(Y)=n\alpha$ وَ $V(Y)=n\alpha(1-\alpha)$

★ قوانين الاحتمال المستمرة

نعتبر فيما يلي $(I;p)$ فضاء احتمالي غير منته، حيث I مجال غير منته من R.

◆ قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$

تعريف

قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$ يهدف إلى الاختيار العشوائي لعدد من المجال $[0;1]$.

a وَ b عددان من المجال $[0;1]$ حيث: $a \le b$.

إذا كان J أحد المجالات الأربعة المحدّدة بالعددين a وَ b

(أي $J=[a;b]$ أو $J=[a;b[$ أو ...)

فـــإن الاحتمال P المعرّف بقانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ يحقق:

$P(J)=b-a$.

خواص

الاحتمال P المعرّف بقانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ يحقق كذلك:

- $P([0;1])=1$ وَ $P(\phi)=0$ وَمن أجل x من المجال $[0;1]$، $P(\{x\})=0$.
- إذا كان J_1 وَ J_2 مجالين منفصلين من $[0;1]$ فإن $P(J_1 \cup J_2)=P(J_1)+P(J_2)$.
- إذا كان $\overline{J}$ متممة المجال J إلى $[0;1]$ فإن $P(\overline{J})=1-P(J)$
- في قانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$، احتمال تحقق أي مجال من $[0;1]$ هو طوله.

◆ القانون الأسي

تعريف

λ عدد حقيقي موجب تماما، وَ f_λ الدالة العددية المعرّفة على المجال $I=[0;+\infty[$ بالدستور: $f_\lambda(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

الاحتمال p على المجال I يعرّف القانون الأسي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

- من اجل كل مجال J من I حداه a وَ b (حيث a وَ b عنصران من I وَ $a \le b$) لدينا: $p(J)=\int_a^b f_\lambda(x)dx$.
- من اجل كل مجال J حيث: $J=[a;+\infty[$ (a عنصر من I) لدينا: $p(J)=1-p([0;a])$.

تعليق

احتمال تحقق المجال $[a;b]$ يفسّر هندسيا، بمساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني الممثّل للدالة f_λ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a$ وَ $x=b$.

★ قانون احتمال مستمر ذات كثافة

تعريف

- f دالة مستمرة وموجبة تماما على المجال $I=[a;b]$ من R، حيث: $\int_a^b f(t)dt=1$.

نعرّف الاحتمال p على المجال I كما يلي:

من اجل كل مجال J من I حداه c وَ d حيث $c \le d$، $p(J)=\int_c^d f(t)dt$

- f دالة مستمرة وموجبة تماما على المجال $I=[a;+\infty[$ من R، حيث:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$$

نعرّف الاحتمال p على المجال I كما يلي:

من اجل كل مجال J من I حداه c وَ d حيث $c \le d$، $p(J)=\int_c^d f(t)dt$.

ومن أجل كل مجال K من I حيث : $K=[c;+\infty[$ أو $K=]c;+\infty[$

مع $c \ge a$، $p(K)=1-\int_a^c f(t)dt$

في الحالتين p يعرّف قانون الاحتمال على المجال I، والدالة f تدعى **الكثافة**.

للحفظ

قانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بـــالدستور: $f(x)=1$.

القانون الأسي الذي وسيطه λ، المعرّف على $\mathbb{R}_+$ هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بـــالدستور: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

تمـــارين محـــلولة

الاحتمال الشرطي

1

نلقي زهرة نرد رباعية الوجوه، مرتين على التوالي تحمل أوجهها الأربعة الأرقام من 1 إلى 4.

نهتم بمجموع الرقمين اللذين يظهران بعد الرميتين. احسب احتمال:

- المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3.
- المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2.

الحل: $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته، حيث $Card(\Omega)=4^2=16$، A و B حادثتين من Ω حيث: $p(A)\neq 0$

A حادثة " المجموع يساوي 6" لدينا: $A=\{(2;4);(4;2);(3;3)\}$

B حادثة " الرمية الأولى تعطي 3" لدينا: $B=\{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4)\}\neq\phi$

وَ $A\cap B=\{(3;3)\}$

إذاً: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3

هو: $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}}=\dfrac{1}{4}$

A' حادثة " المجموع أكبر من أو يساوي 7" لدينا: $A'=\{(3;4);(4;3);(4;4)\}$

B' حادثة " الرمية الأولى تعطي 2" لدينا: $B'=\{(2;1);(2;2);(2;3);(2;4)\}\neq\phi$

وَ $A'\cap B'=\phi$

إذاً: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2

هو: $p_{B'}(A')=\dfrac{p(A'\cap B')}{p(B')}=0$

توضيف شجرة الاحتمالات واستعمال دستور الاحتمالات الكليّة

2

في دراسة إحصائية لتجمع سكاني معيّن، أفادت أن 10% من الأشخاص يحملون فيروسا ما.

إجراءات فحص استعجالية أُتخذت في هذا التجمع السكاني للتعرّف على هؤلاء الأشخاص. فلوحظ أنه من بين الأشخاص الحاملين لهذا الفيروس 95% كان فحصهم ايجابي(فعلا حاملون للفيروس) ومن بين الأشخاص غير الحاملين لهذا الفيروس 4% فحصهم كان ايجابي.

نختار عشوائيا شخصا من هذا التجمع ويجرى له الفحص.

A الحادثة " الشخص حامل للفيروس"

و B الحادثة " الفحص ايجابي".

- احسب احتمال الحوادث: $A\cap B$ ، $\overline{A}\cap B$ ، B.
- احسب الاحتمالين: $p_B(A)$ ، $p_B(\overline{A})$.

الحل: لحساب احتمال الحادثتين $A\cap B$ ، $\overline{A}\cap B$ نستعين بشجرة الاحتمالات التالية: (ترسم في نهاية الحل) لحساب احتمل الحادثة B نستعمل دستور الاحتمالات الكلية وذلك باعتبار أن A وَ $\overline{A}$ هما الحادثتين في مجموعة الإمكانيات.

$$p(B)=p(A)\times p_A(B)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=\frac{131}{1000}$$

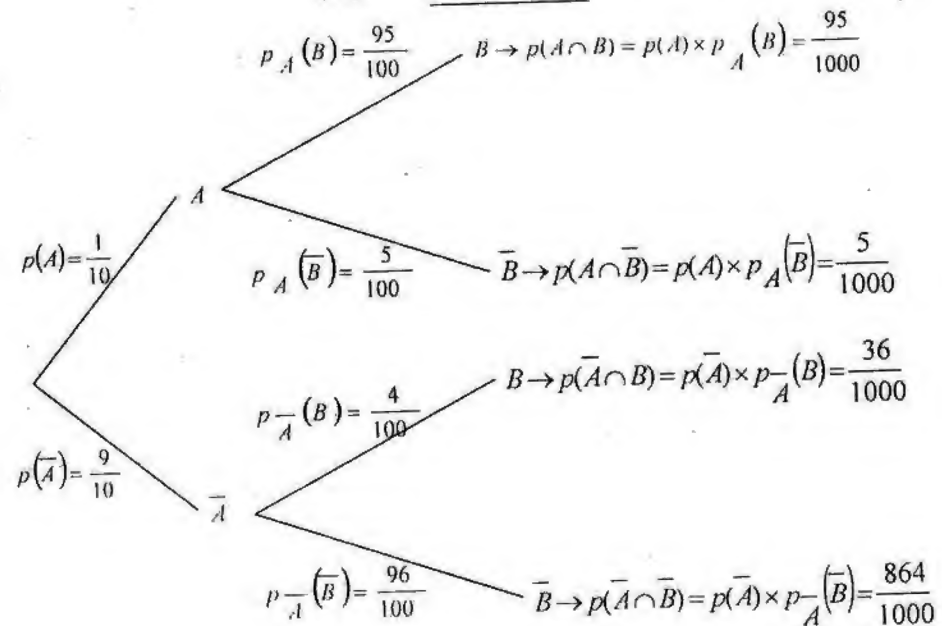
$p_B(A)$ هو احتمال تحقق الحادثة A علما أن الحادثة B تحقّقت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{95}{131}$$

$p_B(\overline{A})$ هو احتمال تحقق الحادثة $\overline{A}$ علما أن الحادثة B تحقّقت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(\overline{A})=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}=\frac{36}{131}$$

الشـــــجرة (العنكبوتية)



قانون برنولي

3	يحوي صندوق خمس كرات لا نميّز بينها عند اللمس (2 بيضاء وَ 3 سوداء) • نسحب من هذا الصندوق كرة واحدة، كيف يمكننا اختيار مجموعة الإمكانيات التي توافق قانون برنولي في هذه الحالة؟ • نجري أربع سحبات لكرة من الصندوق مع الإرجاع– السحبات الأربع مستقلّة– ما احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات سوداء؟. • نعيد عملية سحب كرة من الصندوق 100 مرةَ مع الإرجاع، ما هو معدّل الكرات السوداء المسحوبة؟

الحل: نختار مجموعة الإمكانيات الموافقة لقانون برنولي مثلاً $\Omega=\{B;N\}$ حيث: B هو الأبيض وَ N هو الأسود

ولدينا: $p(\{B\})=\frac{2}{5}$ وَ $p(\{N\})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

نعرّف بالسحبة المكرّرة أربع مرات مع الإرجاع، قانون ثنائي الحدّ وسيطاه 4 وَ $\frac{3}{5}$.

إذاً احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات هو:

$$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^1=4\times\frac{54}{625}=0.3456$$

معدّل الكرات السوداء المسحوبة هو الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي لقانون ثنائي الحد وسيطاه 100 وَ $\frac{3}{5}$.وهو $E(X)=100\times\frac{3}{5}=60$.

كثافة الاحتمال

4	في كل حالة أذكر إن كانت الدالة هي كثافة احتمال. • الدالة f معرّفة على المجال $[0;1]$ بالدستور $f(x)=x^2$. • الدالة g معرّفة على المجال $[0;1]$ بالدستور $g(x)=4x^3$. • الدالة h معرّفة على المجال $[1;2]$ بالدستور $h(x)=4x^3$. • الدالة k معرّفة على المجال $[-1;0]$ بالدستور $k(x)=4x^3$. • الدالة l معرّفة على المجال $]2;+\infty[$ بالدستور $l(x)=\frac{2}{x^2}$.

الحل: لدينا $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\neq 1$ إذاً الدالة f لا تمثّل كثافة احتمال.

لدينا $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 4x^3dx=\left[x^4\right]_0^1=1$ وبما أن الدالة g مستمرة وموجبة على $[0;1]$ فإنها تمثّل كثافة احتمال على $[0;1]$.

لدينا $\int_1^2 h(x)dx=\int_1^2 4x^3dx=\left[x^4\right]_1^2=15\neq 1$ إذاً الدالة h لا تمثّل كثافة احتمال.

الدالة k لا تمثّل كثافة احتمال على المجال $[-1;0]$، كونها غير موجبة على $[-1;0]$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\int_2^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x\left(\frac{2}{t^2}\right)dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{t}\right]_2^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$

وبما أن الدالة f مستمرة وموجبة على $[2;+\infty[$ فإنها تمثّل كثافة احتمال على $[2;+\infty[$.

قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي المستمر

5 X المتغيّر العشوائي المستمر، والدالة f كثافة الاحتمال المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=e^{-x}$

علّل كون f كثافة احتمال واحسب احتمل الحادثة $1 \le X \le 2$.

الحل: الدالة $f: x \to e^{-x}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على كامل f وبالخصوص على $[0;+\infty[$.

فهي إذاً **مستمرة على** $[0;+\infty[$. ومن أجل كل x من R، $e^{-x} > 0$

أي الدالة f **موجبة على** $[0;+\infty[$.

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^x = 1$

مما سبق فإن الدالة f كثافة احتمال على المجال $[0;+\infty[$.

$$p([1;2]) = p(1 \le X \le 2) = \int_1^2 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_1^2 = e^{-1}-e^{-2} \approx 0.23$$

القانون الأسي

6 جهاز كهربائي يشتغل ببطاريتين P_1 و P_2. X_1 المتغير العشوائي الذي يرفق بكل بطارية من النوع P_1 المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة، و X_2 المتغير العشوائي الذي يرفق بكل بطارية من النوع P_2 المدة الزمنية لصلاحياتها بالساعة.

نفرض أن المتغيران العشوائيان X_1 و X_2 مستقلان ويتبعان نفس القانون الأسي الذي كثافته الدالة f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور:

$$f(x)=0.001e^{-0.001x}$$

نفرض أن الجهاز يتوقف عن التشغيل بمجرد نفاد إحدى البطاريتين.

- احسب احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة.
- احسب احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل.

الحل: احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة، **يعــــني**

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية إحدى البطاريتين على الأقل P_1 أو P_2 أصغر من أو تساوي 500 ساعة. هو:

$$p((X_1 \le 500)\cup(X_2 \le 500)) = p(X_1 \le 500)+p(X_2 < 500)-p((X_1 \le 500)\cap(X_2 \le 500))$$
$$= p(X_1 \le 500)+p(X_2 \le 500)-p(X_1 \le 500)\times p(X_2 \le 500)$$
$$= 2\int_0^{500}0.001e^{-0.001x}dx-\left(\int_0^{500}0.001e^{-0.001x}dx\right)^2 \approx 0.63$$

احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل، **يعــــني**

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية كلا البطاريتين P_1 و P_2 أكبر من أو تساوي 1000 ساعة. هو:

$$p((X_1 \ge 1000)\cap(X_2 \ge 1000)) = p(X_1 \ge 1000)\times p(X_2 \ge 1000)$$
$$= \left(\lim_{x\to+\infty}\int_{1000}^{x}0.001e^{-0.001t}dt\right)^2 = e^{-2}$$

تمارين للتدريب

1. بسّط العبارات التالية: $\frac{12!}{15!}$ ، $\frac{6!5!}{3!4!}$ ، $6!\left(\frac{9}{8!}-\frac{1}{7!}\right)$ ؛ $\frac{n!}{(n+1)!}$ ، $\frac{n(n+1)!}{(2n)!}$ ، $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

باستعمال الرمز ! أعط كتابة أخرى لكل من الأعداد التالية:

$4\times5\times6\times7\times8\times9$ ، $\frac{9\times8\times7\times6\times5}{3\times2}$ ، $n(n+1)(n+2)$.

أنشر ثنائيات الحد التالية: $(a+1)^5$ ، $(2a-3b)^4$ ، $(2x-1)^6$.

باستعمال نشر ثنائي الحد $(a-1)^n$ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي زوجي لدينا: $C_n^0+C_n^2+C_n^4+...+C_n^n=C_n^1+C_n^3+C_n^5+...+C_n^{n-1}$

دون النشر، أعط معامل x^4 في نشر ثنائي الحد $(2x-1)^6$.

أنشئ الأسطر الخمسة الأولى لمثلث باسكال، ثم احسب الأعداد 11^2، 11^3، 11^4 باستعمال مثلث باسكال.

باستعمال دستور ثنائي الحد، أشرح الظاهرة الملاحظة، ثم فسّر كيف أن هذه الظاهرة لا تصلح من اجل العدد 11^5.

2. وعاء U_1 يحوي كرتين حمراوين وكرة خضراء. وعاء U_2 يحوي كرة حمراء وكرتين خضراوين.

<u>المرحلة الأولى</u>: نلقي زهرة النرد المكعّبة متقنة الصنع.

<u>المرحلة الثانية</u>: إذا ظهر الوجه 6 فإننا نسحب كرة من الوعاء U_1، وإذا لم يظهر 6 فإننا نسحب الكرة من الوعاء U_2.

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثتين: A : نحصل في الزهرة على 6 ونسحب كرة حمراء.

B : الحصول على كرة حمراء في نهاية المرحلة الثانية.

3. يحوي وعاء 4 كرات مرقّمة من 1 إلى 4.

نسحب على التوالي ثلاث كرات مع الإرجاع، ونعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة أصغر رقم يظهر في الكرات الثلاث.

عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.؟

4. يحوي وعاء عشر كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب من هذا الوعاء بالصدفة وفي آن واحد أربع كرات ونهتم بالأرقام التي تحملها.

ما هو عدد مخارج هذا النشاط؟

احسب احتمال تحقق كلا من الحوادث التالية:

A نحصل على رقم واحد مضاعف ثلاثة. C نحصل بالضبط على رقمين مضاعفين لثلاثة.

B لا نحصل على أي عدد مضاعف ثلاثة. D نحصل على الأقل على رقم مضاعف ثلاثة.

5. ينقسم مصنع إلى ثلاث وحدات α ، β ، γ لإنتاج المصابيح الكهربائية.

وحدة الإنتاج α تغطي 20% من إنتاج المصنع منها 5% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج β تغطي 30% من إنتاج المصنع منها 4% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج γ تغطي 50% من إنتاج المصنع منها 1% غير صالحة للاستعمال.

نختار بالصدفة مصباح، احسب احتمال كلا من الحوادث التالية.

A : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة α .

B : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة γ .

C :المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة β .

6. يلعب نسيم لعبة معيّنة ذات عدّة جولات بحيث حظوظ الربح في الجولة الأولى تعادل حظوظ الإخفاق فيها.

نفرض انه، عندما يربح نسيم جولة فإن احتمال ربح الجولة التي تليها هو 0.6 . عندما يخفق نسيم في جولة فإن احتمال الإخفاق في الجولة التي تليها هو 0.7 .

من اجل العدد الطبيعي n ، نضع: A_n حادثة "يربح نسيم الجولة من الرتبة n ".

B_n حادثة " يخفق نسيم في الجولة من الرتبة n ".

- احسب احتمال الحوادث A_1 ، B_1 وَ A_2 واستنتج احتمال الحادثة B_2 .
- نضع: من أجل كل n من N^* : $X_n = P(A_n)$ وَ $Y_n = P(B_n)$

  بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $X_{n+1} = 0.6X_n + 0.3Y_n$ وَ $Y_{n+1} = 0.4X_n + 0.7Y_n$
- نضع: من أجل كل n من N^* : $V_n = X_n + Y_n$ وَ $W_n = 4X_n - 3Y_n$.

  بيّن أن المتتالية (V_n) ثابتة.
- بيّن أن المتتالية (W_n) هندسية، ثم عبّر عن W_n وَ X_n بدلالة n .

  أدرس تقارب المتتالية العددية (X_n) .

7. حارس مرمى في كرة القدم يحقق احتمال لصد الضربات الترجيحية يقدّر بـ: 0.3 .

يتعرّض هذا الحارس لخمس ضربات ترجيحية — (نفرض أن هذه الضربات مستقلّة).

ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس لرمية على الأقل؟ ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس للرميات الخمس؟

8. p احتمال مرافق للقانون الأسي الذي كثافته الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

عيّن العدد الحقيقي الموجب تماما λ بحيث يكون: $p([0:2]) = \dfrac{e^4 - 1}{e^4}$

9. قرّر محمد زيارة مغازة لشراء بعض الحاجيات. دخل محمد المغازة عشوائيا بين الساعة 11:00 و الساعة 12:00 على أن لا تزيد جولته عن 10 دقائق.

ما احتمال أن يتمكّن محمد من الاستفادة من التخفيضات التي ستعرضها إدارة المغازة في المدة الزمنية من 11:45 إلى 12:15؟

10. قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[a;b]$ حيث: $a<b$ يهتم بسحب عدد حقيقي بطريقة عشوائية من المجال $[a;b]$.

يتميّز هذا القانون بالخاصة التالية: احتمال كل مجال من $[a;b]$ متناسب مع طوله.

نفرض أن قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[a;b]$ هو قانون احتمال مستمر ذات كثافة. أي أنه توجد دالة f معرّفة ومستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث: من أجل كل مجال $[c;d]$ محتوى في $[a;b]$ لدينا: $p([c;d])=\int_c^d f(t)dt$

نهدف في هذا التمرين إلى تعيين الدالة f.

- لتكن F دالة أصلية للدالة f.

بيّن أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث، من اجل كل مجال $[c;d]$ محتوى في $[a;b]$ لدينا:

$$F(d)-F(c)=k(d-c)$$

- نعتبر العدد x_0 من المجال $[a;b]$، بيّن أن الدالة F تقبل الاشتقاق عند x_0، واحسب $F'(x_0)$.
- استنتج أن الدالة f ثابتة على المجال $[a;b]$.
- باستعمال المساواة $p([a;b])=1$ أعط عبارة $f(t)$ من أجل كل t من $[a;b]$.
- ارسم التمثيل البياني للدالة f على المجال $[a;b]$، وفسّر هندسيا النتائج المحصّل عليها سابقاً (خذ $a=-1$ وَ $b=4$)

تطبيــــق: نختار عشوائيا عددا من المجال $[-1;4]$ ما احتمال أن يكون هذا العدد في المجال $[0;1]$؟

ما احتمال أن يكون هذا العدد أصغر من -0.39 علما أنه سالب؟

7- الأعداد المركبة

ما يجب أن يعرف:

★ الأعداد المركّبة – التمثيل الهندسي

◆ العدد المركّب

تعريف

العدد المركّب هو عدد من الشكل $x+iy$ حيث: x و y عددان حقيقيان وَ i عدد تخيلي يحقّق $i^2=-1$.

نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز C.

للحفظ

الكتابة $z=x+iy$ للعدد المركّب حيث: x و y عددان حقيقيان تدعى **الشكل الجبري** للعدد المركّب z

x يدعى الجزء الحقيقي للعدد المركّب z ويرمز له $\mathrm{Re}(z)$.

y يدعى الجزء التخيلي للعدد المركّب z ويرمز له $\mathrm{Im}(z)$.

من أجل كل عدد مركّب z ، z عدد حقيقي **إذا وفقط إذا** كان $\mathrm{Im}(z)=0$.

z عدد تخيّلي **إذا وفقط إذا** كان $\mathrm{Re}(z)=0$.

$z=x+iy$ وَ $z'=x'+iy'$ عددان مركّبان كتبا بشكلهما الجبري

$z=z'$ يكافئ $x=x'$ وَ $y=y'$ ، $z=0$ يكافئ $x=0$ و $y=0$

$z+z'=(x+x')+i(y+y')$ مجموع عددين مركّبين

$z\times z'=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$ جدا عددين مركبين

◆ التمثيل الهندسي

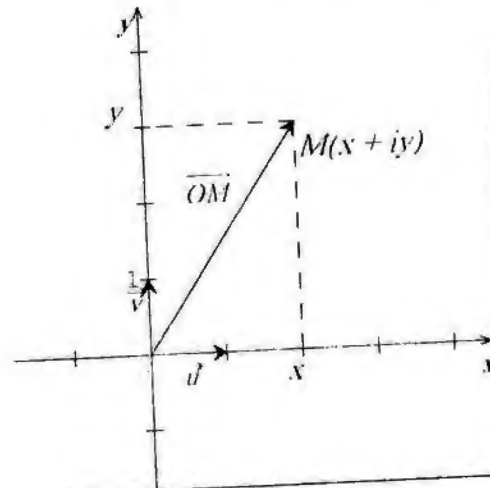
$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

• لكل عدد مركب $z = x + iy$ (حيث: x و y عددان حقيقيان) نرفق النقطة M من المستوي إحداثياها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، أو نرفق الشعاع $\overrightarrow{OM}$ إحداثياته $(x;y)$ في نفس المعلم.

M تدعى النقطة الصورة للعدد المركّب z.

$\overrightarrow{OM}$ يدعى الشعاع الصورة للعدد المركّب z.

• لكل نقطة M من المستوي إحداثياها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نرفق عدد مركب $x + iy$ ويدعى لاحقة النقطة M، أو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$.



للحفظ

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_A و z_B.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي العدد المركّب $z_B - z_A$.

لاحقة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو العدد المركّب $\frac{z_A + z_B}{2}$.

• $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z'.

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً **إذا وفقط إذا** كان $z = kz'$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

العدد المركّب z حقيقي **إذا وفقط إذا** كانت صورته M تقع على محور الفواصل.

العدد المركّب z تخيلي **إذا وفقط إذا** كانت صورته M تقع على محور التراتيب.

◆ مرافق عدد مركّب

تعريف

z عدد مركّب يكتب بالشكل الجبري $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

مرافق العدد المركّب z هو العدد المركّب الذي نرمز له $\bar{z}$ ويكتب بالشكل $\bar{z} = x - iy$.

للحفظ

• في المستوي المركّب، صورتا العددين المركّبين المترافقين متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.

• z و z' عددان مركّبان.

• $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$,

$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ / $z \neq 0$

• $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

• z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $z = \bar{z}$.

• z عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = -z$.

◆ طويلة و عمدة عدد مركّب غير معدوم

تعريف

z عدد مركّب غير معدوم يكتب بالشكل الجبري $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

M صورة للعدد المركّب z في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(r;\theta)$ الإحداثيات القطبية للنقطة M.

r يدعى طويلة العدد الركّب z ويرمز له $|z|$.

θ يدعى عمدة العدد المركّب z ويرمز له $\arg(z)$.

خواص طويلة عدد مركّب

للحفظ

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت النقطة M صورة للعدد المركّب z فإن $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$.

إذا كانت النقطتان A وَ B صورتين للعددين المركّبين z_A، z_B فإن $AB = |z_B - z_A| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

- من أجل كل عددين مركّبين z وَ z' لدينا:

$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, $|zz'| = |z| \times |z'|$ ، $|z + z'| \le |z| + |z'|$

$|z|^2 = z\bar{z}$ ، $n \in N \ / \ |z^n| = |z|^n$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ، $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ حيث $z \neq 0$

- $|z| = 0$ يكافئ $z = 0$
- $|z| = 1$ يكافئ $\bar{z} = \frac{1}{z}$

خواص عمدة عدد مركّب غير معدوم

للحفظ

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت النقطة M صورة للعدد المركّب غير المعدوم z فإن $\arg(z) = (\vec{i};\overrightarrow{OM})$.

إذا كانت النقط A، B، C المتمايزة صور الأعداد المركّبة z_A، z_B، z_C فإن:

$(\vec{i};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ وَ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

للحفظ

$z \in \mathbb{R}^*$ يكافئ $\arg(z) = k\pi$	$z \in i\mathbb{R}^*$ يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\arg(z) = -\arg(\bar{z}) + 2k\pi$	$k \in Z / \ \arg(z) = \pi + \arg(-z) + 2k\pi$

للحفظ

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$ ، $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

$n \in N \ / \ \arg z^n \equiv n\arg z[2\pi]$ ، $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg z' - \arg z[2\pi]$

◆ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

تعريف

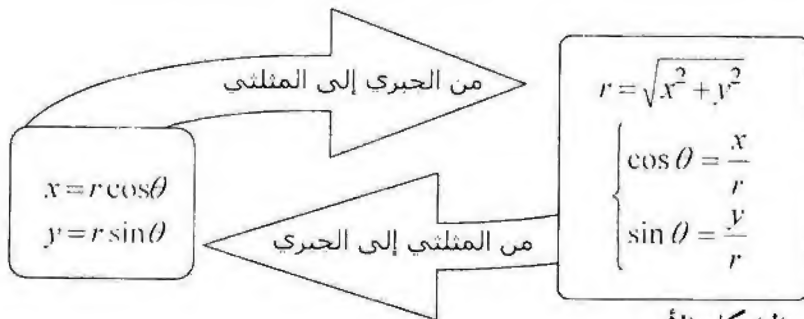
z عدد مركّب غير معدوم، r عدد حقيقي موجب تماما وَ θ عدد حقيقي كيفي.

r طويلة العدد z وَ θ عمدة له **إذا وفقط إذا كان** z يكتب بالشكل

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

هذه الكتابة للعدد z تدعى **الشكل المثلثي** للعدد المركّب z.

الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري والعكس



◆ الشكل الأسي

تعريف

z عدد مركّب غير معدوم، r عدد حقيقي موجب تماما وَ θ عدد حقيقي كيفي.

للعدد المركّب z كتابة من الشكل $z = re^{i\theta}$ تدعى الشكل الأسي للعدد z.

خـــواص

- $r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ يكافئ $r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi$ حيث $k\in Z$.
- $re^{i\theta}=r'e^{i\theta'}$ يكافئ $r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi$ حيث $k\in Z$.
- من أجل كل n من Z، $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

  و $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ / (دستور موافر)
- $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (دستور أولر)

★ المعادلات من الدرجة الثانية

◆ الجذران التربيعيان لعدد مركب

عدد مركب غير معدوم و θ عمدة له. المعادلة $z^2=a$ تقبل في المجموعة C ...ين متعاكسين هما: $\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ و $-\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

ويدعيان الجذران التربيعيان للعدد a.

مبرهنة1

المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث(a ، b ، c أعداد مركّبة و $a\neq0$)

تقبل حلين في المجموعة C هما: $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ و $\dfrac{-b+\delta}{2a}$

حيث: δ جذر تربيعي للعدد $\Delta=b^2-4ac$.

نتيجة

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث (a ، b ، c أعداد مركّبة و $a\neq0$)

إذا كان z_1 و z_2 حلّي هذه المعادلة فإنه من أجل كل عدد مركب z ،

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

ولدينا: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ و $z_1\times z_2=\dfrac{c}{a}$

◆ الجذور النونية لعدد مركب

مبرهنة2

a عدد مركّب غير معدوم، طويلته r والعدد الحقيقي θ عمدة له.

العدد a له n جذر نوني وهي حلول المعادلة $z^n=a$ ذات المجهول المركّب z. هذه الحلول كلها من الشكل:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} \quad / \quad k\in\{0;1;2;...;(n-1)\}$$

للحفظ

في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. $a\in C^*$ و n عدد طبيعي.

صور حلول المعادلة $z^n=a$ ذات المجهول المركّب z حيث ($n\geq3$)، هي رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه n مرسوم داخل الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt[n]{|a|}$.

★ الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية في المستوي

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النقطتان M و M' صورتي العددين المركّبين z و z' على الترتيب.

f الدالة ذات المتغيّر المركب z المرفقة بالتحويل النقطي T حيث:

$f(z)=z'$ يكافئ $T(M)=M'$

الجدول التالي يلخّص التعريف الهندسي والتعريف المركّب للتحويل النقطي.

التحويل النقطي	التعريف الهندسي	التعريف المركّب
الانسحاب شعاعه $\vec{v}$ الذي لاحقته $z_{\vec{v}}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$	$z' = z + z_{\vec{v}}$
التحاكي مركزه Ω الذي لاحقته z_Ω ونسبته k. حيث $k \in \mathbb{R}^*$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$
دوران مركزه Ω الذي لاحقته z_Ω وزاويته θ	$\Omega M' = \Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$	$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

تمــارين محــلولة

الكتابة عل الشكل الجبري

1 اكتب كلا من الأعداد التالية على الشكل الجبري، ثم عيّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

$z_1 = (1+i)^3$ ، $z_2 = (2i-3)(2+3i)$ ، $z_3 = i^5$ ، $z_4 = \frac{1-i}{i+2}$ ، $z_5 = \frac{5}{i}$.

الحل: $z_1 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$ $\leftarrow$ $\text{Re}(z_1) = -2$ و $\text{Im}(z_1) = 2$.

$z_2 = (2i-3)(2+3i) = 4i - 6 - 6 - 9i = -12-5$ $\leftarrow$ $\text{Re}(z_2) = -12$ و $\text{Im}(z_2) = -5$.

$z_3 = i^5 = i \times i^2 \times i^2 = i(-1)(-1) =$ $\leftarrow$ $\text{Re}(z_3) = 0$ و $\text{Im}(z_3) = 1$.

$z_4 = \frac{1-i}{i+2} = \frac{(1-i)(-i+2)}{(i+2)(-i+2)} = \frac{-i+2+i^2-2i}{1+4} = \frac{1-3}{5}$ $\leftarrow$ $\text{Re}(z_4) = \frac{1}{5}$ و $\text{Im}(z_4) = -\frac{3}{5}$.

$z_5 = \frac{5}{i} = \frac{5(-i)}{-i^2} = -5i$ $\leftarrow$ $\text{Re}(z_5) = 0$ و $\text{Im}(z_5) = -5$.

الأشكال المختلفة لعدد مركّب

2 ضع على الشكل المثلثي ثم الأسي كلا من الأعداد:

$z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ ، $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$. $z_3 = -1 + i$.

ضع على الشكل الجبري كلا من العددين:

$z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_5 = -3(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$.

الحل: $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$. لدينا $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$ نسمي θ_1 عمدة العدد z_1 تحقّق

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذاً: $k \in \mathbb{Z} / \theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

وبالتالي: $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ و $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$. لدينا $|z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$ نسمي θ_2 عمدة العدد z_2 تحقّق

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

إذاً: $k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$

وبالتالي: $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ و $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$z_3 = -1 + i$. لدينا $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ نسمي θ_3 عمدة العدد z_3

تحقّق: $\begin{cases}\cos\theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ إذاً: $k \in Z / \theta_3 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$

وبالتالي: $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$ وَ $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. يعني أن $|z_4| = 2$ وَ $\arg z_4 = -\frac{\pi}{3}$

إذاً: $z_4 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ أي $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$.

$z_5 = -3(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$. يعني أن $|z_5| = 3$ و $\arg z_5 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

إذاً: $z_5 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أي $z_5 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

حل معادلات في C

3

• حل في مجموعة الأعداد المركّبة C المعادلات التالية:

$3z^2+z-1=0$ ، $3z^2+z+1=0$ ، $z^2+(-2+9i)z-18-6i=0$.

• نعتبر العبارة $f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$ ذات المتغيّر z من C.

بيّن أن المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا في C.

حل في C المعادلة $f(z)=0$.

الحل: • $3z^2+z-1=0$. تميزها هو $\Delta = 13$ حليها هما: $z' = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ وَ $z'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ إذاً: $S = \{z'; z''\}$.

$3z^2+z+1=0$. تميزها هو $\Delta = -11 = (i\sqrt{11})^2$ حلّيها هما:

$z' = \frac{-1-i\sqrt{11}}{6}$ وَ $z'' = \frac{-1+i\sqrt{11}}{6}$ إذاً: $S = \{z'; z''\}$.

$z^2 + (-2+9i)z - 18 - 6i = 0$. تميزها هو $\Delta = (-2+9i)^2 - 4(-18-6i) = -5-12i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ.

نضع: $z = x+iy$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ حيث: x وَ y عددان حقيقيان.

$z^2 = \Delta$ يكافئ $(x+iy)^2 = \Delta$ يكافئ $x^2 - y^2 + 2ixy = -5-12i$

يكافئ $\begin{cases}x^2 - y^2 = -5\\ 2xy = -12\end{cases}$ يكافئ $z = 2-3i$ أو $z = -2+3i$

إذاً: حلّي المعادلة هما:

$$z' = \frac{(2-9i)-(2-3i)}{2} = -3i$$

وَ $$z'' = \frac{(2-9i)+(2-3i)}{2} = 2-6i$$

وبالتالي $S = \{z'; z''\}$.

لاحظ

يمكن إضافة معادلة ثالثة مساعدة لحل الجملة وهي: $x^2+y^2=13$ تنتج من تساوي الطويلتين للعددين z^2 وَ Δ وهي في اتجاه واحد.

$z_1 = z_2$ يستلزم $|z_1| = |z_2|$

• نبحث عن العدد الحقيقي z_0 الذي يحقّق $f(z_0) = 0$.

$f(z_0) = 0$ يكافئ $z_0^3 + 9iz_0^2 + 2(6i-11)z_0 - 3(4i+12) = 0$ يكافئ

$$(z_0^3 - 22z_0 - 36) + (9z_0^2 + 12z_0 - 12)i = 0$$

يكافئ $\begin{cases}z_0^3 - 22z_0 - 36 = 0\\ 9z_0^2 + 12z_0 - 12 = 0\end{cases}$ أي $z_0 = -2$ وهو حل حقيقي للمعادلة $f(z) = 0$.

لإيجاد الحلول الأخرى للمعادلة $f(z) = 0$ ، نحلّل العدد $f(z)$ إلى جدا عاملين أحدهما من الدرجة الأولى نعرفه والآخر من الدرجة الثانية نبحث عنه، باستعمال جدول هورنر (مثلاً)

معاملات $f(z)$	1	$9i$	$12i-22$	$-12i-36$
الحل الحقيقي -2	//////	-2	$-18i+4$	$12i+36$
معاملات هورنر	1	$9i-2$	$-6i-18$	0

يعني أن: $f(z) = (z+2)(z^2 + (9i-2)z - 6i - 18)$ من أجل كل z من C.

$f(z) = 0$ يكافئ $z+2=0$ أو $z^2 + (9i-2)z - 6i - 18 = 0$ حلّت سابقاً

يكافئ $z = -2$ أو $z = 2-6i$ أو $z = -3i$

وبالتالي: $S = \{-2; -3i; 2-6i\}$.

التعرّف على مجموعة النقط

4

في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقطة M بإحداثياتها $(x;y)$ صورة العدد المركّب z.

عيّن وأنشئ (P_1) و (P_2) مجموعتي النقط M من المستوي حيث:

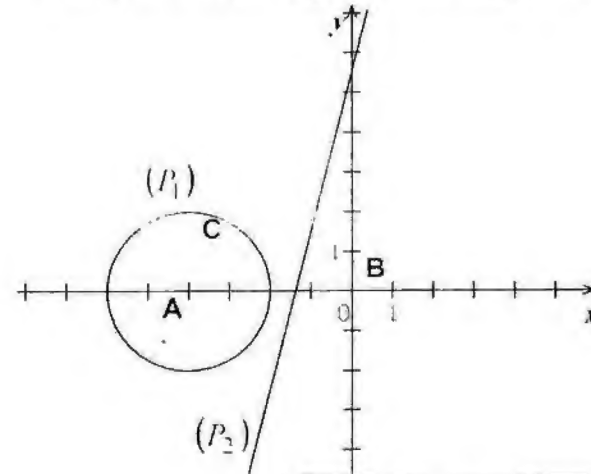
$(P_1): |z+4|=2$ ، $(P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$.

<u>الحل:</u> $(P_1): |z+4|=2$ تكافئ $(P_1): AM=2$ حيث A صورة العدد -4.

إذاً: (P_1) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2.

$(P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$ تكافئ $(P_2): BM=CM$ حيث B صورة العدد $(1+i)$ و C صورة العدد $(2i-3)$.

إذاً: (P_2) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$.



التحويلات النقطية والأعداد المركّبة

5

A صورة العدد المركّب $-1+\sqrt{3}+i$ في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

s التناظر المركزي الذي مركزه O، r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$، h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3}$.

• أحسب لاحقة كلا من النقط B ، C' ، D علماً أن: $B=s(A)$ ، $C'=r(A)$ ، $D=h(C')$. (يتبع)

5

• بيّن أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

استنتج طبيعة المثلث ABD.

<u>الحل:</u> $B=s(A)$ يكافئ $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$ معناه $z_B=-z_A$ أي $z_B=1-\sqrt{3}-i$.

$C'=r(A)$ يكافئ $z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{2}}z_A$ معناه $z_{C'}=iz_A$ أي $z_{C'}=-1+i(-1+\sqrt{3})$.

$D=h(C')$ يكافئ $z_D=\sqrt{3}z_{C'}$ أي $z_D=-\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3})$.

• يكفي التحقّق من العلاقة: $z_A-z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_D)$

لدينا من جهة: $z_A-z_D=-1+\sqrt{3}+i-(-\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3}))=(2\sqrt{3}-1)+i(-2+\sqrt{3})$

ومن جهة أخرى: $e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_D)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i(\sqrt{3}-4))=(2\sqrt{3}-1)+i(-2+\sqrt{3})$.

وبالتالي: $z_A-z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_D)$ إذاً: A هي صورة B بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

• الكتابة الأخيرة تعني أن: $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ / $k\in Z$ و $DA=DB$

هذا يعني أن المثلث ABD متساوي الساقين وزاوية الرأس الأساس D هي $60°$.

وبالتالي المثلث ABD متقايس الأضلاع.

تمارين للتدريب

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

$-z^2+2z-11=0$, $2z+i\bar{z}+8i=0$, $2z+i-(3-i)^2=7i+iz-1$

$z^2-2z\sin\alpha+1=0$ / $\alpha\in\mathbb{R}$ ، $z^3+z^2+z+1=0$ ، $z^4+(3-4i)z^2-12i=0$

$z^2\sin^2\alpha+z\sin2\alpha+1=0$ / $\alpha\in]0;\pi[$

2. نعتبر العددين المركبين $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_2=2+2i\sqrt{3}$

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية: z_1 ، z_2 ، z_1z_2 ، $\frac{z_2}{z_1}$ ، z_1^3. استنتج قيمة كلا من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3. f الدالة المعرّفة على المجموعة $\mathbb{C}-\{-i\}$ بالدستور: $f(z)=\frac{iz}{z+i}$

نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- عيّن إحداثيات النقطة A ذات اللاحقة z_0 حيث: $f(z_0)=1+2i$.
- من أجل كل عدد مركّب z من $\mathbb{C}-\{-i\}$، نضع: r طويلة العدد $(z+i)$ وَ العدد α عمدة له.

  أعط الشكل المثلثي للعدد المركّب $f(z)+i$ بدلالة r و α.
- نعتبر النقطة I ذات اللاحقة $-i$.

  عيّن Ω مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق: $|f(z)+i|=\sqrt{2}$.

  عيّن Ω' مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق: $\arg(f(z)+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
- بيّن أن النقطة A تنتمي إلى $\Omega\cap\Omega'$، ثم أنشئ المجموعتين Ω وَ Ω'.

4. في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط A، B، C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-2$ ، $z_B=1+i$ ،

$z_C=-1-3i$

- تعرّف على طبيعة المثلث ABC.
- من أجل كل عدد مركّب $z\neq 1+i$ نضع: $Z=\frac{z+1+3i}{z-1-i}$
  - فسّر هندسيا طويلة وعمدة العدد المركّب Z.
  - عيّن وأنشئ Λ مجموعة النقط M صور العدد z بحيث: $|Z|=1$.
  - عيّن وأنشئ Ψ مجموعة النقط M صور العدد z بحيث يكون Z تخيلي صرف.

5. في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 1، ومن أجل كل عدد حقيقي θ من المجال $[0;2\pi]$ النقطة M ذات اللاحقة $z=e^{i\theta}$.

نضع: P وَ Q النقطتان ذات اللاحقتان $1+z$ و z^2 على الترتيب.

- انطلاقا من النقطة M أعط إنشاء هندسيا لكل من النقطتين P و Q. ضع النقط O، A، M، P وَ Q في نفس الشكل.
- عيّن وأنشئ مجموعة النقط P من المستوي عندما يتغيّر θ في $[0;2\pi]$.
- نضع: S لاحقة العدد المركّب (z^2+z+1) حيث z يمثّل دائما لاحقة النقطة M.
- عيّن وأنشئ مجموعة النقط S.
- في حالة $S\neq O$. أنشئ المستقيم (OS) وضع تخمينا حول النقط O، S وَ M.
- بيّن أن العدد $\frac{z^2+z+1}{z}$ حقيقي من أجل كل θ من المجال $[0;2\pi]$. استنتـــج.

6. المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.
- نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$
  - أكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.
  - احسب المسافات OA, OB, AB، واستنتج طبيعة المثلث OAB.
- نعتبر النقطة E صورة العدد المركّب $i-\sqrt{3}$ و النقطة D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$. عيّن اللاحقة d للنقطة D.
- نعتبر النقطة G مرجّح الجملة المثقلة $\{(O;-1);(D;1);(B;1)\}$.

تحقق من وجود النقطة G، ثم عيّن لاحقتها g. بيّن أن النقط E، D، G على استقامة واحدة.

7. f التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=3z+3-i$.

- بيّن أن للتحويل النقطي f نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تعيين لاحقتها ω.
- تحقّق أن: $z'-\omega=3(z-\omega)$ و استنتج طبيعة f.

8. f التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

بيّن أن f دورانا مركزه O يطلب تعيين زاويته. عيّن صورة حامل محور الفواصل بالدوران f.

9. s التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -z + 4$.

- بيّن أن للتحويل النقطي s نقطة صامدة واحدة A يطلب تعيين لاحقتها a.
- بيّن أن s هو التناظر المركزي والذي مركزه A.
- r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$، نضع: $M'' = (r \circ s)(M)$.
- أنشئ النقطة M'' من أجل $z = 3 + i$.

بيّن أن النقطة M'' هي صورة النقطة M بدوران يطلب تعيين مركزه وزاويته.

10. المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيات $(x;y)$، النقطة M' ذات الإحداثيات $(x';y')$،

حيث: $\begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases}$ ، a، b، a'، b' أعداد حقيقية.

- بيّن أن اللاحقتين z وَ z' للنقطتين M وَ M' على الترتيب تحققان العلاقة $z' = mz + p$ حيث m وَ p عددان مركّبان يطلب تعيينهما بدلالة الأعداد a، b، a' وَ b'.
- عيّن الأعداد a، b، a' و b' حتى يكون التحويل النقطي T انسحابا شعاعه $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$.
- عيّن الأعداد a، b، a' و b' حتى يكون التحويل النقطي T تحاكيا نسبته 3 ومركزه $A(1;2)$.
- عيّن الأعداد a، b، a' و b' حتى يكون التحويل النقطي T دورانا زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه $I(0;2)$.

8- التشابهات المستوية المباشرة

ما يجب أن يعرف:

★ **عموميات حول التشابهات المستوية**

تعريف

التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يحافظ على تناسب المسافات.

أي: من أجل النقط الأربعة A، B، C و D وصورها A'، B'، C' و D' على الترتيب بالتشابه المستوي، لدينا: $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.

أي: التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يضاعف المسافات k مرة.

العدد الحقيقي الموجب **تماما** k يدعى نسبة التشابه.

التقايس (أو تساوي القياس) هو التشابه المستوي نسبته 1.

خــواص

- مركّب تشابهين المستوي نسبتاهما k وَ k' هو تشابه المستوي نسبته kk'.
- التحويل العكسي للتشابه المستوي الذي نسبته k هو التشابه المستوي الذي نسبته $\frac{1}{k}$.
- التشابه المستوي يحافظ على استقامية النقط.
- التشابه المستوي يحوّل كل مثلث ABC إلى مثلث $A'B'C'$ يشبهه.
- التشابه المستوي يحافظ على الزوايا.

★ التشابه المستوي المباشر

تعريف التشابه المستوي المباشر هو التشابه المستوي الذي يحافظ على الزوايا الموجّهة.

أي: من أجل النقط الأربعة A، B، C وَD حيث $A \neq B$ وَ $C \neq D$ وصورها A'، B'، C'' وَ D' على الترتيب بالتشابه المستوي المباشر، لدينا: $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) + 2l\pi \quad / \quad l \in Z$.

الانسحاب،التحاكي،الدوران، هي تشابهات المستوي المباشر.

خـواص

- مركّب تشابهين المستوي المباشر زاويتاهما θ و θ' هو تشابه المستوي المباشر زاويته $\theta + \theta'$.
- التحويل العكسي للتشابه المستوي المباشر الذي زاويته θ هو التشابه المستوي المباشر الذي زاويته $-\theta$.
- التشابه المستوي المركّب المباشر يحوّل النقطة ذات اللاحقة z إلى النقطة ذات اللاحقة z' معرّف بالعبارة: $z' = az + b$ حيث a وَ b عددان مركّبان وَ $a \neq 0$.
- في العبارة $z' = az + b$ حيث $a \neq 0$ لدينا: $\arg(a)$ يدعى زاوية التشابه المستوي المباشر.
- التشابه المستوي المباشر الذي يختلف عن الانسحاب، يقبل نقطة صامدة **واحدة** تدعى مركزه.

للحفظ

s تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω. (s ليس انسحاب)

- s هو مركّب (تبديلي) للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k مع الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ.
- s تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω. (s ليس انسحاب)، يحوّل النقطة M (حيث $M \neq \Omega$) إلى النقطة M' حيث: $\Omega M' = k\Omega M$ وَ $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi]$

يتبع...

- s تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω. (s ليس انسحاب)، يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z (حيث $M \neq \Omega$) إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' يعطى بالعبارة: $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \quad / \quad \omega$ لاحقة Ω.
- التشابه المستوي المباشر يحافظ على تشابه مباشر للمثلثات، ويحافظ على مرجّح الجملة المثقلة.
- التشابه المستوي المباشر يحوّل المستقيم على مستقيم، والقطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة، والدائرة إلى دائرة.
- التشابه المستوي الذي يترك ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة هو التحويل المطابق.
- التشابه المستوي الذي يترك نقطتان صامدتان A وَ B متمايزتان هو التحويل المطابق أو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم (AB).
- من أجل كل أربع نقط A، B، C وَD حيث: $A \neq B$ وَ $C \neq D$، يوجد تشابه المستوي المباشر f وحيد حيث: $f(A) = C$ وَ $f(B) = D$.

★ الإزاحة

تعريف الإزاحة هو تشابه المستوي المباشر نسبته 1.

أي: الإزاحة هو تقايس يحافظ على الزوايا الموجّهة.

الإزاحة هو الانسحاب أو الدوران

للحفظ

نعتبر s التشابه المستوي. لدينا حالتين:

① إما s التشابه المستوي المباشر.

② إما s هو مركّب تشابه المستوي للمباشر مع تناظر محوري بالنسبة لـ Δ (يختار كيفيا).

في هذه الحالة الثانية s يحوّل كل زاوية إلى زاوية معاكسة. ويدعى s التشابه المستوي **غير** المباشر محوره Δ.

تمارين محلولة

التعرّف على التشابه المستوي

1

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

f الدالة في المستوي ترفق بكل نقطة ذات اللاحقة z النقطة ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (1-i)z + 2 - i$.

بيّن أن الدالة f هي التشابه المستوي المباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

الحل: العبارة $z' = (1-i)z + 2 - i$ هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $a = 1-i$ و $b = 2-i$ إذاً: f هو التشابه المستوي المباشر.

لدينا: $|a| = |1-i| = \sqrt{2}$ و $\arg a = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi \ / \ l \in Z$

أي: نسبة التشابه f هي $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

مركز التشابه المستوي المباشر f هي النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_0

تحقق: $z_0 = (1-i)z_0 + 2 - i$ أي: $z_0 = -1-2i$.

مركّب دوران وتحاك

2

A، B، C وD أربع نقط من المستوي المركّب، لواحقها على الترتيب 0، 1، $1+i$ و i. نعتبر النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$.

h التحاكي الذي مركزه D ونسبته $\frac{1}{2}$ و r الدوران الذي مركزه K وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- أعط العبارة المركّبة لكل من h و r.
- استنتج طبيعة التحويل النقطي $h \circ r$ وعناصره المميّزة.

الحل: العبارة المركّبة للتحاكي h مركزه D لاحقتها i ونسبته $\frac{1}{2}$ هي من

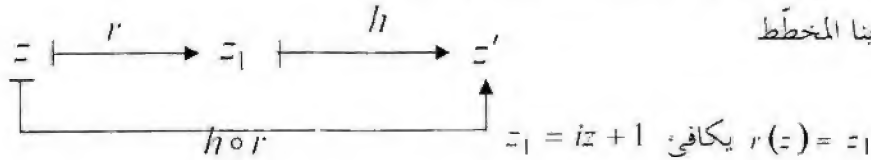
الشكل: $z' - i = \frac{1}{2}(z-i)$ أي: $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$.

العبارة المركّبة للدوران r مركزه K لاحقتها $\frac{1+i}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي من

الشكل: $z' - \frac{1+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z - \frac{1+i}{2}\right)$ أي: $z' = iz + 1$

استخراج العبارة المركّبة للتحويل النقطي $h \circ r$.

لدينا المخطّط



$r(z) = z_1$ يكافئ $z_1 = iz + 1$

$h(z_1) = z'$ يكافئ $z' = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}i$

أي: $h[r(z)] = z'$ يكافئ $z' = \frac{1}{2}(iz+1) + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}z + \frac{1+i}{2}$

هي عبارة مركّبة من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $a = \frac{i}{2}$ و $b = \frac{1+i}{2}$

إذاً: $h \circ r$ تشابه المستوي المباشر نسبته $|a| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ وزاويته $\arg a = \frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_0 تحقق $z_0 = \frac{i}{2}z_0 + \frac{1+i}{2}$ أي: $z_0 = \frac{1+3i}{5}$.

التعرّف على المحل الهندسي

3

نعتبر في المستوي الموجّه المثلث ABC القائم في B والمتساوي الساقين. M نقطة كيفية من المستقيم (BC) و M' النقطة من المستوي بحيث يكون المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

- أعط النسبة k والزاوية θ للتشابه المستوي المباشر s الذي مركزه A ويحوّل النقطة M إلى النقطة M'.
- عيّن مجموعة النقط M' من المستوي عندما تتغيّر النقطة M على المستقيم (BC).

<u>الحل:</u> التشابه المستوي المباشر s مركزه A ويحوّل النقطة M إلى النقطة M' معناه:
$AM' = kAM$ وَ $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)=\theta[2\pi]$.

إذاً: $k=\frac{AM'}{AM}=\sqrt{2}$ (حسب علاقة *Pythagore*) وَ $\theta=\frac{\pi}{4}+2l\pi$ / $l \in Z$.

(كون $\frac{\pi}{4} = \hat{M}' = \hat{A}$ في المثلث AMM')

عندما تتغيّر النقطة M على المستقيم (BC) فإن صورتها M' بالتشابه s تتغيّر على المستقيم $s(BC)$.

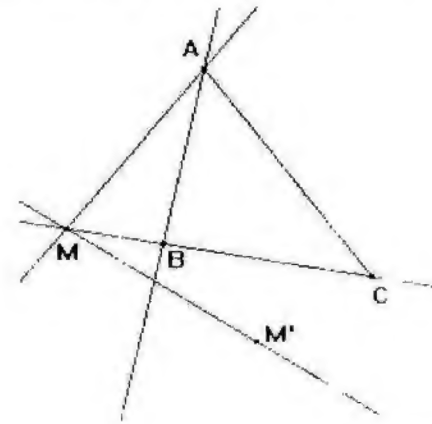
بما أن B نقطة من (BC) فإن صورتها

$s(B)=C$ نقطة من المستقيم $s(BC)$.

ومن أجل كل نقطة M من المستقيم (BC)

تختلف عن B، صورتها M' تحقق:

$\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM'}\right)=\frac{\pi}{4}$



إذاً: المحل الهندسي للنقطة M' هو المستقيم الذي

يشمل C ويصنع مع المستقيم (BM)

زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$

التشابه المستوي غير المباشر

4	$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات الإحداثيات $(x;y)$ إلى النقطة M' ذات الإحداثيات $(x';y')$ حيث: $x'=2y+2$ وَ $y'=2x-1$ • بيّن أن f يقبل نقطة صامد واحدة Ω يطلب تعيين إحداثياتها. • بيّن أن f تشابه المستوي نسبته 2 . • h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2 ،يحوّل النقطة M إلى النقطة M_1 . بيّن أن منتصف القطعة المستقيمة $[M'M_1]$ يمر من المستقيم Δ الذي يشمل النقطة Ω،يطلب تعيين معادلة المستقيم Δ. ماذا تستنتج إذاً عن التشابه f ؟

<u>الحل:</u> $\Omega(x;y)$ صامدة في التحويل f معناه $f(\Omega)=\Omega$ أي: $x=2y+2$ وَ $y=2x-1$

أي: $x=0$ وَ $y=-1$ بما أن الجملة التحليلية قبلت حلا واحداً فإن $\Omega(0;-1)$ وحيدة.

نعتبر $M(x;y)$ وَ $N(a;b)$ نقطتان من المستوي وَ M' وَ N' صورتيهما على الترتيب بالتحويل النقطي f .

لدينا إذاً: $MN^2=(a-x)^2+(b-y)^2$ وَ

$$M'N'^2=(a'-x')^2+(b'-y')^2$$
$$=4\left[(a-x)^2+(b-y)^2\right]=4MN$$

أي: $M'N'=2MN$ هذا يعني أن f التشابه المستوي نسبته 2 .

h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2 ويحوّل النقطة M إلى النقطة M_1 **معناه**

$\Omega M_1=2\Omega M$

بوضع: $M_1(x_1;y_1)$ نحصل على العبارة التحليلية للتحاكي h : $x_1=2x$ وَ $y_1=2y+1$

إذاً: إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[M'M_1]$ هي: $(x_I;y_I)$

حيث: $x_I=x+y+1$ وَ $y_I=x+y$.

ينتج أن: $x_I=y_I+1$ وهي العلاقة بين إحداثيات منتصف القطعة $[M'M_1]$.

وبالتالي مجموعة منتصفات القطع $[M'M_1]$ هي المستقيم Δ ذي المعادلة: $y=x-1$. واضح أن إحداثيات Ω تحقق معادلة Δ .

نلاحظ أن $\overrightarrow{M'M_1}\begin{pmatrix}2x-2y-2\\2y-2x+2\end{pmatrix}=(2x-2y-2)\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ حيث: $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظم للمستقيم Δ .

أي $\overline{M'M_1}$ يعامد Δ وبما أن منتصف القطعة $[M'M_1]$ يقع على Δ، فإن M' وَ M_1 متناظرتان بالنسبة للمستقيم Δ .

إذاً: f هو التشابه المستوي غير المباشر ، مركزه Ω ونسبته 2 ومحوره Δ .

التشابه المستوي غير المباشر ذو نقطتين صامدتين على الأقل

5

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{4+3i}{5}\bar{z}-1+3i$

- عيّن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f.
- عيّن طبيعة التحويل f وأذكر عناصره المميّزة.

الحل: النقطة M ذات اللاحقة z صامدة في التحويل f معناه $f(M)=M$

أي: $z=\frac{4+3i}{5}\bar{z}-1+3i$

يكافئ $x+iy=\frac{4+3i}{5}(x-iy)-1+3i$ يكافئ $(x-3y+5)+i(-3x+9y-15)=0$

يكافئ $\begin{cases} x-3y+5=0 \\ -3x+9y-15=0 \end{cases}$ يكافئ $x-3y+5=0$

يعني أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f هي المستقيم Δ الذي معادلته $x-3y+5=0$.

العبارة $z'=\frac{4+3i}{5}\bar{z}-1+3i$ هي من الشكل: $z'=a\bar{z}+b$

حيث: $a=\frac{4+3i}{5}$ و $b=-1+3i$

إذاً: f هو التشابه المستوي **غير** المباشر. وبما أن f يترك أكثر من نقطة صامدة واحدة وكلها على استقامة واحدة. يعني أن: f هو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم Δ.

تمارين للتدريب

1. ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين. I منتصف القطعة $[BC]$.

- أعط العناصر المميّزة لكل من التشابه المستوي المباشر s الذي مركزه B ويحوّل I إلى A وَ التشابه المستوي المباشر s' الذي مركزه B ويحوّل A إلى C.
- عيّن طبيعة التحويل النقطي $s'\circ s$ واذكر عناصره المميّزة.

2. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين A وَ B ذات اللاحقتين $\sqrt{2}$ وَ i على الترتيب. C النقطة من المستوي بحيث يكون الرباعي $OACB$ مستطيل.

نضع: I منتصف القطعة $[OA]$ و J منتصف القطعة $[BC]$.

- f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{-i\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$.
  - بيّن أن f هو التشابه المستوي المباشر ثم عيّن مركزه Ω ونسبته k وزاويته θ.
  - عيّن صور النقط O، A، B و C بالتشابه f.
- بيّن أن النقط Ω، A و B على استقامة واحدة، وأن النقط Ω، I و C على استقامة واحدة.
- استنتج إنشاء للنقطة Ω.
- بيّن أن Ω نقطة من الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومن الدائرة التي قطرها $[IA]$.

3. f التحويل النقطي في المستوي المركّب، يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=a^2z+a-1$ حيث a عدد مركّب معطى.

- عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f سحبا. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.
- عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f تناظر مركزي. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f تحاك نسبته -2. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f دورانا زاويته $\frac{\pi}{2}$. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• حدّد f من أجل $a=1-i$.

4. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين $A(3;-1)$ و $B(0;2)$.

h التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ ، r الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{3\pi}{4}$،
و t الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BO}$.

• أنشئ النقطة D من المستوي والتي صورتها بالتحويل $t\circ r\circ h$ هي النقطة O.

• بيّن أن التحويل النقطي $t\circ r\circ h$ هو التشابه المستوي المباشر s وعيّن عناصره المميّزة.

• بملاحظة أن المثلث $OD\Omega$ قائم ومتساوي الساقين، أنشئ النقطة Ω مركز التشابه s.

5. نعتبر المربعين المباشرين $ABCD$ و $A'B'C'D'$.

• بيّن أن يوجد التشابه المستوي المباشر s الذي يحوّل النقط A، B، C و D إلى النقط A'، B'، C' و D' بهذا الترتيب.

• نفرض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ متوازيين، ماذا يمكننا القول عن التشابه s؟ في حالة وجود مركز للتشابه s عيّن وضعيته.

• نفرض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ غير متوازيين، ونعتبر P نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و $(A'B')$ و Q نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و $(C'D')$.

بيّن أن المستقيم (PQ) يشمل المركز Ω للتشابه s. ثم استنتج إنشاء للنقطة Ω.

6. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر الرباعي المحدّب المباشر $ABCD$. ننشئ خارج هذا الرباعي النقط M_1، M_2، M_3 و M_4 بحيث تكون المثلثات الأربعة AM_1B، BM_2C، CM_3D و DM_4A قائمة عند النقط M_1، M_2، M_3 و M_4 على الترتيب ومتساوية الساقين.

• نضع: a، b، c و d لواحق النقط A، B، C و D على الترتيب و z_1، z_2، z_3 و z_4 لواحق النقط M_1، M_2، M_3، M_4 على الترتيب.

  • باعتبار التشابه الذي مركزه A ويحوّل النقطة B إلى النقطة M_1، بيّن أن $z_1=\frac{a+b+i(a-b)}{2}$.

  • عبّر عن z_2، z_3 و z_4 بدلالة الأعداد a، b، c و d.

• بيّن أن حاملا القطعتين $[M_1M_3]$ و $[M_2M_4]$ متعامدين وأن $M_1M_3=M_2M_4$.

7. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

• عيّن صورة النقطة A ذات اللاحقة 2 بالتحويل f، ولاحقة النقطة B حيث: $f(B)=O$.

• تعرّف على طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميّزة.

• في حالة $M\neq A$ بيّن أن المثلث AMM' قائم في النقطة M'.

8. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

• عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي والتي لاحقتها z تحقق: $\left|(1-i\sqrt{3})z-i-\sqrt{3}\right|=4$.

• أعط العبارة المركّبة للتشابه المستوي المباشر s الذي يحوّل النقطة A ذات اللاحقة i إلى النقطة O و يحوّل النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى النقطة B' ذات اللاحقة $-4i$. معيناً مركز ونسبة وزاوية التشابه s.

• باستعمال نتائج السؤال السابق، أوجد المجموعة (E) المعرّفة في التمرين.

9. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

s التشابه المستوي المباشر، مركزه O ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

من أجل n عدد طبيعي، نعتبر مجموعة النقط M_n المعرّفة بـ: $M_{n+1}=s(M_n)$

و M_0 النقطة ذات اللاحقة 1.

نرمز بـ: z_n للاحقة النقطة M_n.

- أعط العبارة المركّبة للتشابه المستوي المباشر s.
- بيّن أن المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية، واكتب عبارة z_n بدلالة n.
- احسب z_1، z_2، z_3 و z_n.
- أحسب OM_n بدلالة n
- بيّن أن $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$ واستنتج أن: $(M_nM_{n+1}) \perp (OM_{n+1})$

وأن $M_nM_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

- نضع: $K_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$. عبّر عن K_n بدلالة n
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$

.10 $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

(D) المستقيم الذي يشمل المبدأ O و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.

نرمز بـ: α لقياس الزاوية $(\vec{i};\vec{u})$.

- تحقق أن النقطة A ذات اللاحقة $e^{i\alpha}$ تنتمي إلى المستقيم (D).
- استنتج أن العبارة المركّبة للتناظر المحوري $S_{(D)}$ بالنسبة للمستقيم (D) هي: $z' = e^{2i\alpha}\,\bar{z}$.
- ضع الشكل النهائي للعبارة المركّبة للتحويل $S_{(D)}$ في كل من الحالتين: $(D): x - y\sqrt{3} = 0$ ، $(D): y = -x$.

9- الهندسة الفضائية

ما يجب أن يعرف:

★ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء.

A، B، C ثلاث نقط من الفضاء تحقق: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو P يشمل النقط A، B، C.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ في المستوي P. وهو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ المعرّف بـ:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$ حيث: $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

و $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ من أجل $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

★ التعامد في الفضاء

للحفظ

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء متعامدان **معناه** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- المستقيمان (D) و (D') من الفضاء متعامدان **معناه** شعاعي توجيههما $\vec{d}_{(D)}$ و $\vec{d}_{(D')}$ متعامدان.
- الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستقيم (D) **معناه** $\vec{n}$ يعامد شعاع التوجيه $\vec{d}_{(D)}$ للمستقيم (D).
- الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (P) في الفضاء **معناه** $\vec{n}$ يعامد شعاعان غير مرتبطين خطياً من (P).

يتبع...

• المستقيم (D) يعامد المستوي (P) **معناه** شعاع توجيه المستقيم (D) هو شعاع ناظم على المستوي (P).

• المستويان (P) وَ (P') في الفضاء متعامدان **معناه** شعاعيهما الناظم $\vec{n}(p)$ و $\vec{n}(p')$ متعامدان.

★ المعادلة الديكارتية للمستوي

تعريف $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (P) مستو من الفضاء يشمل النقطة A وَ $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظم له.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء:

$M(x;y;z)\in(P)$ **معناه** $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

من التكافؤ الأخير تنتج معادلة للمستوي (P) من الشكل:

$ax+by+cz+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$.

للحفظ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

• المسافة بين النقطتين $A(x_0;y_0;z_0)$ وَ $B(x_1;y_1;z_1)$ هي:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

• المسافة بين النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$. هي: $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

تمارين محلولة

التعامد في الفضاء

1

A ، B ، C وَ D أربع نقط من الفضاء.

• برهن صحة التكافؤ التالي:

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ **إذا وفقط إذا** كان المستقيمان (AB) وَ (CD) متعامدان.

• $ABCD$ رباعي الوجوه حيث (AB) وَ (CD) متعامدان و (AD) وَ (BC) متعامدان.

بيّن أن المستقيمان (AC) وَ (BD) متعامدان.

الحل: $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ يكافئ $(AC^2-AD^2)+(BD^2-BC^2)=0$

يكافئ $(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=0$

يكافئ $\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=0$

يكافئ $\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})=0$ أي $\overrightarrow{DC}\cdot(2\overrightarrow{AB})=0$

يعني أن الشعاعان $\overrightarrow{DC}$ وَ $\overrightarrow{AB}$

وبالتالي في حالة $A\neq B$ وَ $C\neq D$ يكون لدينا: المستقيمان (AB) وَ (CD) متعامدان.

لدينا المستقيمان (AB) وَ (CD) متعامدان، ينتج حسب ما سبق أن:

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ ......(1)

ومن تعامد (AD) وَ (BC) ينتج كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة أن: $AC^2+BD^2=AB^2+DC^2$ ......(2).

من (1) وَ (2) ينتج أن $AD^2+BC^2=AB^2+DC^2$ هذا يعني كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة أن: المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان.

معادلات ديكارتية للمستقيم والمستوي في الفضاء

2

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;-1)$ ، $B(2;0;3)$

و $C(-1;3;2)$ ثلاث نقاط من هذا الفضاء.

أعط تمثيل وسيطي ثم ديكارتي للمستقيم (AB).

تحقق من وجود المستوي (ABC) ثم أعط معادلة ديكارتية له.

الحل: لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-2;4)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$M(x;y;z)\in(AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

يكافئ
$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad / \quad k\in\mathbb{R}$$

أي:
$$\begin{cases} x=k+1 \\ y=-2k+2 \\ z=4k-1 \end{cases} \quad / \quad k\in\mathbb{R}$$
ويستنتج التمثيل الديكارتي بجملة

...عادلتين مستقلتين عن k.

$$\begin{cases} x=k+1 \\ y=-2k+2 \\ z=4k-1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} k=x-1 \\ y=-2(x-1)+2 \\ z=4(x-1)-1 \end{cases}$$

تكافئ
$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 4x-z-5=0 \end{cases}$$
تدعى تمثيل ديكارتي للمستقيم (AB)

...لمستوي (ABC) موجود إذا وفقط إذا كانت النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

...ي: المستوي (ABC) موجود إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا.

...فرض أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا أي يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$

...عني أن:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ معناه } \begin{cases} -3k=1 \\ 3k=-2 \\ -k=4 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} k=-\frac{1}{3} \\ k=\frac{-2}{3} \\ k=-4 \end{cases}$$
وهذا تناقض

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا. (هذا النمط للبرهان يدعى **البرهان بالخلف**).

نعلم أن للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل: $ax+by+cz+d=0$

يكفي إذاً البحث عن الأعداد a ، b ، c و d.

لدينا:
$$\begin{cases} A\in(ABC) \\ B\in(ABC) \\ C\in(ABC) \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} a+2b-c+d=0 \\ 2a+3c+d=0 \\ -a+3b+2c+d=0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a=-\frac{10}{29}d \\ b=-\frac{11}{29}d \\ c=-\frac{3}{29}d \end{cases}$$

نعطي أية قيمة للعدد d. مثلاً $d=29$

نحصل على معادلة المستوي: $(ABC):-10x-11y-3z+29=0$.

حساب مقدار

3

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(3;0;-1)$ ، $B(2;1;-1)$ ،

$C(4;2;5)$ و $D(3;4;3)$ أربع نقط من هذا الفضاء.

- تأكد أن المثلث ABC متساوي الساقين ثم احسب مساحته.
- تأكد أن للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل: $2x+2y-z-7=0$.
- أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، ثم حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل: لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;6)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;1;6)$

إذاً: $AB=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$ ، $AC=\sqrt{1+4+36}=\sqrt{41}$ و $BC=\sqrt{4+1+36}=\sqrt{41}$

يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين ورأسه الأساس هو C.

مساحة المثلث ABC هي S_{ABC} حيث: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times CI$ و I منتصف القطعة $[AB]$

لدينا: $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right)$

و $AI=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $CI=\frac{9}{\sqrt{2}}$

أي:
$$S_{ABC}=AI\times CI=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}\,(u.a)$$

• يكفي التحقق من أن إحداثيات النقط الثلاث A، B و C' تحقق معادلة (ABC')، علما أنها ليست على استقامة واحدة.

$A \in (ABC')$ أي $2(3)+2(0)-(-1)-7=6+1-7=0$

$B \in (ABC')$ أي $2(2)+2(1)-(-1)-7=4+2+1-7=0$

$C' \in (ABC')$ أي $2(4)+2(2)-5-7=8+4-5-7=0$.

• المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC') تعطى بالعلاقة: $\frac{|2x_D+2y_D-z_D-7|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4}{3}$

هذه المسافة تمثّل طول الارتفاع h النازل من الرأس D على القاعدة (ABC') في رباعي الوجوه $ABC'D$.

إذاً: حجم رباعي الوجوه $ABC'D$ يعطى بالعلاقة: $V_{ABC'D}=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}=2\,(u.v)$.

حيث: $s=S_{ABC'}$ و $h=\frac{4}{3}$

$(u.a)$ يرمز إلى وحدة المساحة و $(u.v)$ يرمز إلى وحدة الحجم.

المسافة بين نقطة ومستقيم

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;0)$، $B(2;3;-2)$ $C'(0;2;4)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء. • عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB). • عيّن النقطة M من المستقيم (AB) بحيث تكون المسافة MC' أصغر ما يمكن.	4

الحل: لدينا $\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$M(x;y;z)\in(AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

يكافئ $\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ / $k\in\mathbb{R}$

أي: $\begin{cases}x=k+1\\y=k+2\\z=-2k\end{cases}$ / $k\in\mathbb{R}$ يدعى التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).

• $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (AB) معناه $M(k+1;k+2;-2k)$

وبالتالي: $MC'^2=(k+1)^2+(k+2-2)^2+(-2k-4)^2$ أي

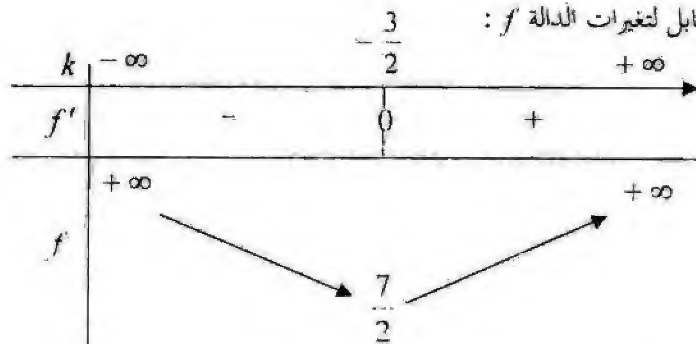
$MC'^2=6k^2+18k+17$

أصغر قيمة ممكنة للمسافة MC'، هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة

$f:k\mapsto 6k^2+18k+17$

بعد دراسة مختصرة لتغيرات الدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية

نحصل على الجدول المقابل لتغيرات الدالة f :



أصغر قيمة للدالة f هي $\frac{7}{2}$ تأخذها من أجل $k=-\frac{3}{2}$. هذا يعني أن أصغر قيمة للعدد MC'^2 هي : $\frac{7}{2}$. إذاً: أصغر قيم للمسافة MC' هي: $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

المسافة بين نقطة ومستو

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;-1)$ نقطة من هذا الفضاء. نعتبر المستويين P و P' حيث: $(P):2x-y+2z-5=0$ و $(P'):2x+2y-z-4=0$. • بيّن أن المستويين P و P' متعامدان. • أحسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين P و P'. • استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ الناتج من تقاطع المستويين P و P'.	5

الحل: $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاع ناظم على المستوي P وَ $\vec{n}'(2;2;-1)$ شعاع ناظم على المستوي P'.

ولدينا: $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 2\times 2 + 2(-1) + (-1)2 = 0$ معناه $\vec{n}\perp\vec{n}'$ وبالتالي المستويين P وَ P' متعامدين.

المسافة بين النقطة A والمستوي P تعطى بالعبارة: $\frac{|2(1)-(2)+2(-1)-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{3}$.

المسافة بين النقطة A والمستوي P' تعطى بالعبارة: $\frac{|2(1)+2(2)-(-1)-4|}{\sqrt{4+4+1}}=1$.

لتكن I المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P. أي $AI=\frac{7}{3}$ وَ I' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P'.

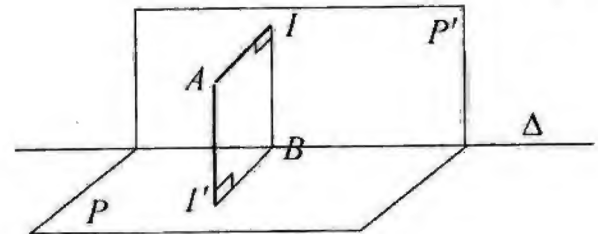
أي $AI'=1$. نسمي B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم Δ.

لدينا الرباعي $AIBI'$ مستطيل، ذلك لأن $(BI')\perp(BI)$ و $(AI)\perp(BI)$ وَ $(BI')\perp(BI)$ (من المعطيات)

: المثلث AIB قائم في I. حسب فيثاغورث Pythagore لدينا:

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1 = \frac{58}{9}$$

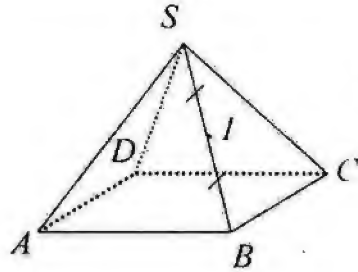
$AB=\frac{\sqrt{58}}{3}$ وهي المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ.



تمارين للتدريب

1. $ABCDS$ هرم، قاعدته مربّعة ورأسه S وَ أحرفه متقايسة وقيسها a.

I منتصف الحرف $[SB]$.



• احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$.

• عيّن قيسا للزاوية $\widehat{AIC}$.

2. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(2;-3;4)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(2;-1;2)$ وَ $D(1;-1;3)$ أربع نقط من هذا الفضاء.

بيّن أن النقط الأربعة A ، B ، C وَ D من نفس المستوي بطريقتين:

• بالتعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$.

• بالبرهان أن النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC).

3. $ABCDEFGH$ مكعّب. بيّن أن المستويين (BDE) وَ (CFH) متوازيين وذلك بطريقتين مختلفتين:

• بطريقة هندسية.

• باستعمال المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ ومعادلات المستويات.

4. $ABCDEFGH$ مكعّب. P مركز ثقل المثلث BEG.

باستعمال المعلم $(E;\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH};\overrightarrow{EA})$. تعرّف على إحداثيات النقط E ، F ، B ، D ، G وَ P ، ثــم بيّن أن النقط D ، F وَ P على استقامة واحدة.

5. $ABCDEFGH$ مكعّب قياس حرفه 1. الهدف في هذا التمرين هو البرهان على أن $(AG)\perp(BDE)$ بثلاث طرق مختلفة.

(1) بيّن أن النقطتين A وَ G تنتميان إلى المستوي المحوري للقطعة $[BE]$ وكذلك إلى المستوي المحوري للقطعة $[BD]$. استنتج.

(2) بيّن أن: $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ وأن: $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$. أستنتج أن $(AG)\perp(BDE)$.

(3) استعمل المعلم المتعامد والمتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

6. $ABCDEFGH$ مكعّب. نعتبر المعلم المباشر للفضاء $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

يرمز I إلى منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$، وَ J مركز المربّع $ADHE$.

- احسب مساحة المثلث IGA. احسب حجم رباعي الوجوه $ABIG$، واستنتج البعد بين النقطة B والمستوي (AIG).
- عيّن إحداثيات K نقطة تقاطع المستقيم (BJ) مع المستوي (AIG).
- اعد إذاً حساب المسافة بين النقطة B والمستوي (AIG).

7. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$A(-1;2;0)$، $B(-3;4;2)$، $C(1;-2;-1)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء.

- بيّن أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.
- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(a;b;c)$ يكون ناظم على المستوي (ABC) **إذا وفقط إذا** كان $\begin{cases}-a+b+c=0\\2a-4b-c=0\end{cases}$.
- استنتج مما سبق إحداثيات صحيحة نسبية للشعاع الناظم $\vec{n}$ على المستوي (ABC) ومعادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

8. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (P) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ والشعاع $\vec{n}(-2;1;5)$ ناظم عليه.

(P') المستوي الذي معادلته الديكارتية هي: $x+2y-7=0$.

- بيّن أن المستويان (P) وَ (P') متعامدان.
- بيّن أن المستويان (P) وَ (P') يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

$C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{d}(2;-1;1)$.

- احسب المسافة بين النقطة $B(5;-2;-1)$ وكلا من المستويين (P) وَ (P')، ثــم عيّن المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).

9. $ABCDEFGH$ مكعّب. نرمز بـ I وَ I' لمركزي الوجهين $ADHE$ وَ $BCGF$ على الترتيب.

- N وَ P نقطتان من القطعتين $[HF]$ وَ $[AC]$ على الترتيب المعرّفتان بـ: $\overrightarrow{HN}=k\overrightarrow{HF}$ وَ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AC}$ حيث: $k\in[0;1]$.
- بيّن أن النقطة N هي مرجّح الجملة المثقلة $\{(H;1-k);(F;k)\}$ وأن النقطة P هي مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;1-k);(C;k)\}$.
- نعتبر النقطة J منتصف القطعة $[NP]$، بيّن أن: $\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{IJ}$ وَ $\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{II'}$.
- استنتج أن: $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{II'}$ / $k\in[0;1]$.
- ما هي مجموعة النقط J عندما يتغيّر k في المجال $[0;1]$؟

10. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. عيّن تقاطع سطح الكرة (Γ) الذي مركزه $\Omega(1;-1;1)$ ونصف قطره 3 مع المستوي (xOy).

10- المقاطع المستوية للسطوح

ما يجب أن يعرف:

★ **مقطع سطح بمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات**

◆ **حالة الاسطوانة الدورانية**

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

(Γ) اسطوانة دورانية محورها (Oz) ونصف قطرها r.

• مقطع (Γ) بالمستوي الذي معادلته $z=a$ / $a\in R$ هي الدائرة C'_a مركزها $\Omega(0;0;a)$ ونصف قطرها r.

• مقطع (Γ) بالمستوي الذي معادلته $x=a$ أو $y=a$ / $a\in R$ هي مستقيم، إتحاد مستقيمين أو مجموعة خالية.

للحفظ

إذا كان (C) مقطع الاسطوانة الدورانية (Γ) بالمستوي العمودي على محورها فإن (Γ) هو:

• اتحاد الدوائر صور (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\lambda\vec{k}$ حيث λ يمسح مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.

• اتحاد المستقيمات الموازية للمستقيم (Oz) والتي تقطع (C).

◆ **حالة المخروط الدوراني**

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Γ') مخروط دوراني غير محدود محوره (Oz) ومركزه O.

• مقطع (Γ') بالمستوي الذي معادلته $z=a$ / $a\in R$ هو الدائرة C'_a التي مركزها $\Omega(0;0;a)$.

• مقطع (Γ') بالمستوي الذي معادلته $x=a$ أو $y=a$ / $a\in R$ هو إتحاد مستقيمين أو قطع زائد.

للحفظ

إذا كان (C) مقطع المخروط الدوراني غير المحدود (Γ') بالمستوي العمودي على محوره والذي لا يشمل O فإن (Γ') هو:

• اتحاد الدوائر صور (C) بالتحاكيات التي مركزها O ونسبتها λ حيث λ يمسح مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا 0 .

• اتحاد المستقيمات التي تشمل المبدأ O ونقطة من (C).

★ **الدوال ذات متغيّرين**

◆ **السطوح**

تعريف

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

f الدالة العددية للمتغيرين x و y معرّفة على المجال I بالنسبة للمتغيّر x وعلى المجال J بالنسبة للمتغيّر y.

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x\in I$ و $y\in J$ و $z=f(x;y)$

تدعى سطح Σ من الفضاء يمثّل الدالة f، و $z=f(x;y)$ هي معادلة ديكارتية للسطح Σ.

مقطع السطح Σ بالمستوي الذي معادلته $z=\lambda$ حيث: $\lambda\in R$ يدعى منحني الدالة f من المستوى λ.

◆ **أسطح خاصة**

• السطح الذي معادلته $z=x^2+y^2$ يدعى **مجسم مكافئ دوراني** *Paraboloid e*.

منحنياته من المستوى هي دوائر.

مقطعه بالمستويات الموازية لأحد المستويين (xOz) أو (yOz) هو قطع مكافئ.

إذا كان (P) القطع المكافئ الذي معادلته $z=x^2$ في المستوي المزوّد بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{k})$.

فإننا نحصل على المجسم المكافئ الدوراني، بدوران (P) حول المحور (Oz).

• السطح الذي معادلته $z = xy$ يدعى **مجسم زائدي دوراني** *hyperboloi de* .

منحنياته من المستوى هي قطوع زائدة معادلتها $xy = k$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

في حالة $k = 0$ نحصل على اتحاد المحورين (Ox) و (Oy) .

تمـــارين محـــلولة

السطوح

1	Σ سطح معادلته $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$. اكتب معادلة Σ بالشكل: $z = (x-a)^2 + y^2 + b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعينهما. استنتج أن Σ محتواة في نصف الفضاء المعرّف بـــ: $z \geq -3$.

الحل: لدينا $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$ تكافئ $z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2$

تكافئ $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

إذاً: $a = 1$ و $b = -3$.

من أجل كل x و y من R، $(x-1)^2 + y^2 \geq 0$ وبالتالي $z \geq -3$

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء، $M(x;y;z) \in \Sigma$ معناه $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

منـــه $z \geq -3$.

استلزام

أي Σ محتواة في نصف الفضاء المعرّف

بـــ: x و y من R و $z \geq -3$.

الأسطوانة الدورانية – المخروط الدوراني – سطح الكرة

2	$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;1;\sqrt{6})$ ، $B(1;2;3)$ و $C(0;0;1)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء. • أعط معادلة المخروط الدوراني Γ الذي محوره (Oz) ورأسه O ويشمل النقطة A . أحسب θ زاويته عند الرأس. • أعط معادلة الأسطوانة الدورانية Ψ التي محورها (Oz) وتشمل النقطة B . • نعتبر سطح الكرة S التي مركزها C ونصف قطرها 3. عيّن طبيعة المجموعة $\Psi \cap S$ واعط معادلة ديكارتية لها.

الحل: للمخروط الدوراني Γ معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$

بما أن $A \in \Gamma$ فإن: $1^2 + 1^2 - \alpha^2 \sqrt{6}^2 = 0$ أي $\alpha^2 = \frac{1}{3}$ وبالتالي: $\Gamma: x^2 + y^2 - \frac{1}{3} z^2 = 0$

نضع: $H(0;0;\sqrt{6})$ المسقط العمودي للنقطة A على المحور (Oz) .

ينتج أن المثلث OHA قائم في H . إذاً: $\tan\theta = \frac{AH}{OH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ منه $\theta = \frac{\pi}{6}$.

للأسطوانة الدورانية Ψ معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 = r^2$

بما أن $B \in \Psi$ فإن: $1^2 + 2^2 = r^2$ أي $r^2 = 5$ وبالتالي: $\Psi : x^2 + y^2 = 5$.

معادلة سطح الكرة S هي: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.

$M(x;y;z) \in \Psi \cap S$ معناه $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=9 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=3 \end{cases}$

هي إتحاد الدائرتين (C) و (C') ،

(C) مركزها $\omega(0;0;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z=-1$.

(C') مركزها $\omega'(0;0;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z=3$.

الدالة ذات متغيرين

3	$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;-1;0)$ ، $B(2;0;4)$ نقطتان من هذا الفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z = x^2 - y^2$. بيّن أن المستقيم (AB) محتوى في السطح (Γ) .

<u>الحل</u>: لدينا: من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء، $M(x;y;z)\in(AB)$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AB}$ أي: $\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

وبالتالي: $\begin{cases}x=k+1\\y=k-1\\z=4k\end{cases}$ / $k\in\mathbb{R}$ هو تمثيل ديكارتي للمستقيم (AB).

هل إحداثيات نقطة M من المستقيم (AB) تحقق معادلة (Γ) ؟

$(k+1)^2-(k-1)^2=k^2+2k+1-k^2+2k-1=4k=z$ وبالتالي (AB) محتوى في السطح (Γ).

الدالة ذات متغيرين

4	$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=2e^{-(x^2+y^2)}$. • بيّن أن السطح (Γ) محصور بين المستويين الذين معادلتهما $z=0$ و $z=2$. • بيّن أن السطح (Γ) يقبل ذروة عظمى وحيدة يطلب تعيينها.

<u>الحل</u>: من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء، $M(x;y;z)\in(\Gamma)$

معناه $z=2e^{-(x^2+y^2)}$.

لدينا: من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$، $x^2+y^2\geq 0$ وبالتالي $-(x^2+y^2)\leq 0$

أي $e^{-(x^2+y^2)}\leq e^0$ يعني أن $0<z\leq 2$ كون العدد الأسي e^X موجب تماما.

إذاً: (Γ) محصور بين المستويين الذين معادلتهما $z=0$ و $z=2$. (دون أن يقطع المستوي $z=0$)

لدينا النقطة $M_0(0;0;2)$ تنتمي إلى السطح (Γ)، ومن الحصر السابق، كل نقطة من (Γ) تحقق $z\leq 2$ فإن $M_0(0;0;2)$ ذروة عظمى للسطح (Γ). هل هي وحيدة؟

نبحث عن x و y من $\mathbb{R}$ علماً أن $z=2$.

$2=2e^{-(x^2+y^2)}$ يكافئ $-(x^2+y^2)=0$ يكافئ $x=0$ و $y=0$

إذاً: النقطة $M_0(0;0;2)$ ذروة عظمى وحيدة للسطح (Γ).

دراسة سطح معادلته من الشكل $z=f(x;y)$

5	$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. • عيّن تقاطع السطح (Γ) مع كل من المستويين: $(P):x=0$ و $(P'):y=2$. • ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k، مجموعة تقاطع (Γ) مع المستوي $(P_k):z=k$.

<u>الحل</u> : من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء،

$M(x;y;z)\in(\Gamma)\cap(P)$ معناه $\begin{cases}z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\x=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=\frac{1}{2}y^2\\x=0\end{cases}$ هي قطع مكافئ

معادلته $z=\frac{1}{2}y^2$ في المستوي (P).

$M(x;y;z)\in(\Gamma)\cap(P')$ معناه $\begin{cases}z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\y=2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=\frac{1}{2}x^2+2\\y=2\end{cases}$ هي قطع مكافئ

معادلته $z=\frac{1}{2}x^2+2$ في المستوي (P').

$M(x;y;z)\in(\Gamma)\cap(P_k)$ معناه $\begin{cases}z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\z=k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=2k\\z=k\end{cases}$

نناقش ثلاثة حالات ($k<0$ ، $k=0$ ، $k>0$)

في حالة $k<0$. الكتابة $x^2+y^2=2k$ مستحيلة (مجموع مربعين هو عدد موجب)

إذاً: $(\Gamma)\cap(P_k)=\phi$.

في حالة $k=0$. $\begin{cases}x^2+y^2=0\\z=k\end{cases}$ تكافئ $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ إذاً: $(\Gamma)\cap(P_k)=\{O\}$.

في حالة $k > 0$. الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=2k \\ z=k \end{cases}$ تعيّن دائرة. إذاً: $(P_k)\cap(\Gamma)$ الدائرة التي مركزها $\Omega(0;0;k)$ ونصف قطرها $\sqrt{2k}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z=k$.

تمارين للتدريب

1. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Σ) الاسطوانة الدورانية التي محورها (Oz) وتشمل النقطة $A(1;2;3)$.

عيّن معادلة ديكارتية للاسطوانة (Σ)، ثم عيّن مقطع (Σ) بكل من المستويات التي معادلاتها: $x=2$، $y=-3$ وَ $z=-4$.

2. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Σ) المخروط الدوراني الذي محوره (Oz) ورأسه O ويشمل النقطة $A(1;2;3)$.

عيّن معادلة ديكارتية للمخروط (Σ)، ثم عيّن مقطع (Σ) بكل من المستويات التي معادلاتها: $z=-2$، $z=1$ وَ $x=y$.

3. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Γ) المخروط الدوراني الذي محوره (Oz) ورأسه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

تحقق أن النقطة $A(1;\sqrt{2};1)$ تنتمي إلى (Γ)، ثم أعط معادلة للمخروط (Γ).

لتكن (Σ) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(0;0;1)$ ونصف قطرها 1،

عيّن المجموعة $(\Sigma)\cap(\Gamma)$.

4. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (D) المستقيم الذي يشمل المبدأ O وشعاع توجيهه $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{k}$

(Γ) المخروط الدوراني الذي رأسه O ومحوره (Oz) ويشمل المستقيم (D).

- أعط معادلة للمخروط الدوراني (Γ).
- عيّن قيمة العدد الحقيقي الموجب تماماً a بحيث يكون مقطع المخروط (Γ) بالمستوي ذي المعادلة $z=a$ هو دائرة نصف قطرها 2 يطلب تعيين مركزها.

5. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=f(x;y)$.

من أجل كل عدد حقيقي k، المنحني ذي المستوى k للدالة f هو المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-k;k+1;k)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$. تعرّف على السطح (Γ) والدالة f.

6. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) ذي المعادلة $x^2+y^2=z^2+1$.

- ما هي النقط من (Γ) الأقرب إلى المحور (Oz)؟
- A نقطة كيفية من (Γ)، كم عدد المستقيمات التي تشمل A ومحتواة في السطح (Γ)؟

7. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=x^2-y^2$.

(P)، (P') وَ (P'') ثلاثة مستويات معادلاتها $x=2$، $y=3$ وَ $z=-2$ على الترتيب.

- عيّن مقطع السطح (Γ) بكل من المستويين (P) وَ (P').
- نعتبر المعلم للفضاء $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{k})$ حيث: $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})$ وَ $\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$.
  ونضع: $(x;y;z)$ وَ $(X;Y;Z)$ إحداثيات النقطة M في المعلمين $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ وَ $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{k})$ على الترتيب.

أعط معادلة ديكارتية للسطح (Γ) في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{k})$، ثم استنتج مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P'').

8. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. f الدالة العددية للمتغيرين x و y من R معرّفة بالدستور: $f(x;y)=x^2-2x+y^2+y-1$. وَ (Γ) السطح الذي معادلته $z=f(x;y)$.

- اكتب $f(x;y)$ بالشكل: $(x-a)^2+(y-b)^2+c$ حيث a، b وَ c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
- بيّن أن الدالة f تقبل قيم حدية صغرى يطلب تعيينها.
- عيّن مقطع السطح (Γ) بكل من المستويين: $(P):x=1$ وَ $(P'):z=-1$.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع سطح الكرة التي مركزها $\Omega\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$

ونصف قطرها 1.

9. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته

$$z=\frac{2}{x^2+y^2+1}.$$

• بيّن أن السطح (Γ) محصور بين المستويين اللذين معادلتهما $z=0$ و $z=2$.

• نعتبر المستوي (P_k) الذي معادلته $z=k$.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع المستوي (P_1) .

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P_k) .

• ارسم المساقط العمودية لمقاطع السطح (Γ) مع كل من المستويات $(P_{0.5})$ ، (P_1) ، $(P_{1.5})$ و (P_2) على المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

10. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

من أجل كل عدد حقيقي k ، نضع: $(P_k): z=k$ و $(\Pi_k): x=k$.

• بيّن أن السطح (Γ) يقبل ذروة صغرى $A(0;0;1)$.

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P_k) .

• نضع: $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)$ ، $\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{k}-\vec{j}\right)$ و I_k النقطة ذات الإحداثيات $(k;0;0)$.

تأكد من أن $\left(I_k;\vec{u};\vec{v}\right)$ معلم متعامد ومتجانس.

باستعمال المعلم $\left(I_k;\vec{u};\vec{v}\right)$ عيّن مقطع السطح (Γ) بالمستوي (Π_k) .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة 

Hard_equation